

Ausarbeitung Versuch 211 Gekoppelte Pendel

Lucas Eekhof

Einleitung

Motivation

Gekoppelte Oszillationen finden sich in vielen Formen: Seien es Moleküle, die in einem Gas in ihren Bewegungsschwingungs- und Rotationszuständen gekoppelt sind, oder Kristalle, in denen alle Atome durch elektrostatische Wechselwirkung effektiv zu einem Medium gekoppelt werden, das selbst wieder die Bewegung von gequantelten Quasiteilchen trägt. Auch in der Biologie spielen Periodische Oszillationen eine Rolle, der Körper selbst ist auf vielen Ebenen durch periodische Abläufe getrieben. Im Folgenden werden zwei mechanische Pendel in Kopplung betrachtet. Dieses einfache gekoppelte System neigt bereits bei leichten Änderungen der Anfangsbedingungen zu verschiedenem Verhalten: Synchrone, oder antisymmetrische Schwingungen, oder gar einem periodischem Wechsel der kinetischen Energie von einem Körper auf den anderen. Auch die Kopplungsstärke und die Pendelmassen werden variiert. Dies führt zu Änderungen der Eigenfrequenzen des gekoppelten Aufbaus, die hier betrachtet werden sollen. Außerdem wird ein elektrischer Schwingkreis qualitativ auf analoges Verhalten untersucht.

Physikalischer Hintergrund

Es wird zum Verständnis des Doppelpendels zunächst das einzelne Pendel und seine Dynamik betrachtet: Sein Trägheitsmoment sei J und sein Direktionsmoment $D = mgL$ mit der Pendellänge L , -masse m und dem Ortsfaktor g . Dann gilt für ausreichend kleine Winkel die Näherung für den Winkel φ des Pendels:

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi \quad (1)$$

Als Lösung ist sofort die harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz ω erkennbar, wobei

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{J}} = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (2)$$

Erfolgt eine Kopplung zweier derartiger Pendel mit dem Direktionsmoment $D' = D_F l^2$, mit der Federkonstanten D_F und der Entfernung l von der Federaufhängung bis zur Pendelachse, so wirkt in Abhängigkeit von den Auslenkungswinkeln der beiden Pendel φ_1 und φ_2 das Drehmoment M_1 , beziehungsweise M_2 nach

$$M_1 = D'(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (3)$$

$$M_2 = D'(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (4)$$

Diese Drehmomente wirken additiv in der Differentialgleichung (1). Man erhält ein System abhängiger Differentialgleichungen:

$$J\ddot{\varphi}_1 = -D\varphi_1 + D'(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (5)$$

$$J\ddot{\varphi}_2 = -D\varphi_2 + D'(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (6)$$

Zur Entkopplung werden $u = \varphi_1 + \varphi_2$ und $v = \varphi_1 - \varphi_2$ substituiert:

$$J\ddot{u} + Du = 0 \quad (7)$$

$$J\ddot{v} + (D + 2D')v = 0 \quad (8)$$

Gelöst werden diese Differentialgleichungen, mit den Amplituden A_1 und A_2 , durch

$$u(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t) \quad ; \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{D}{J}} \quad (9)$$

$$v(t) = A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t) \quad ; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{D + 2D'}{J}} \quad (10)$$

Substituiert man nun noch $\varphi_1 = \frac{1}{2}(u + v)$ und $\varphi_2 = \frac{1}{2}(u - v)$, so erhält man für die Winkel

$$\varphi_{1(t)} = \frac{1}{2}(A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t)) \quad (11)$$

$$\varphi_{2(t)} = \frac{1}{2}(A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t) - A_2 \cos(\omega_2 t) - B_2 \sin(\omega_2 t)) \quad (12)$$

Diese Gleichungen liefern recht komplexe Bewegungsmuster, haben jedoch auch einige einfache Spezialfälle. Es werden hier die symmetrische und die antisymmetrische Schwingung, sowie die Schwebung betrachtet:

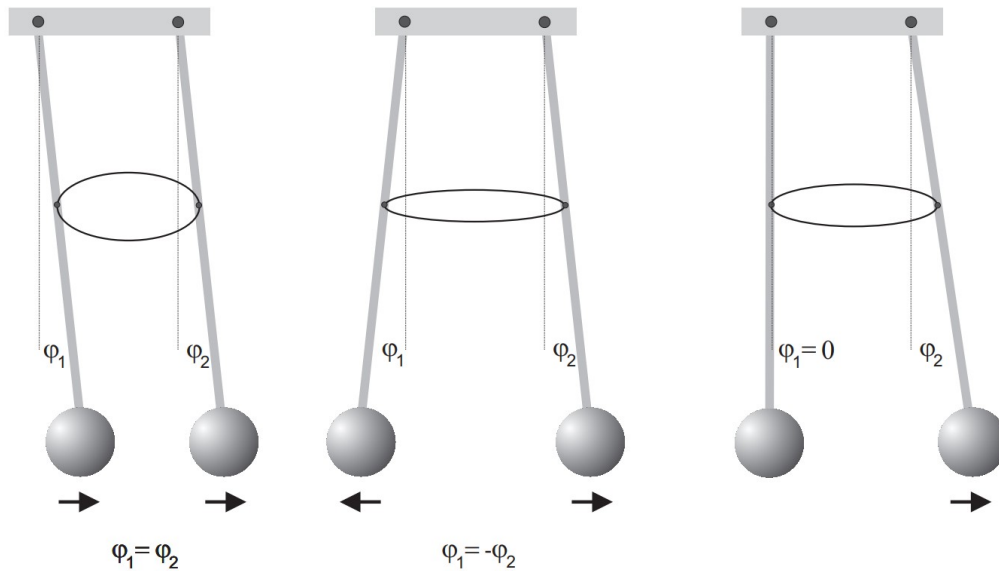


Abbildung 1: Betrachtete Sonderfälle, von links nach rechts: Symmetrisch, antisymmetrisch, Schwebung¹

Um die Fälle zu erreichen, müssen jeweils bestimmte Anfangsbedingungen für die beiden Auslenkungen der Pendel gesetzt werden. Dabei werden die Pendel stets ohne initiale Geschwindigkeit fallen gelassen, also $\dot{\varphi}_{1(0)} = \dot{\varphi}_{2(0)} = 0$.

Symmetrische Schwingung

Zunächst wird die symmetrische Schwingung betrachtet. Um diese zu erreichen, muss die Auslenkung der beiden Pendel zu Beginn φ_0 gleich groß sein, das heißt

$$\varphi_{1(0)} = \varphi_{2(0)} = \varphi_0 \quad (13)$$

Für die Koeffizienten in (11) und (12) erhält man so

$$A_1 = 2\varphi_0 \quad (14)$$

$$A_2 = B_1 = B_2 = 0 \quad (15)$$

Also in der Bewegungsgleichung (11), beziehungsweise (12) eingesetzt

$$\varphi_{1(t)} = \varphi_{2(t)} = \varphi_0 \cos(\omega_1 t) \quad (16)$$

Anschaulich bewegen sich beide Pendel völlig gleich, die Bewegung jedes einzelnen Pendels ist dabei nicht vom jeweils anderen beeinflusst, und nur von den Parametern des freien Pendels abhängig.

¹Wagner, Jens: „Physikalisches Praktikum PAP 2.2 für Studierende der Physik“, 2019

Antisymmetrische Schwingung

Um die antisymmetrische Schwingung zu erreichen, müssen beide Pendel betragsgleich, aber im Vorzeichen gegengerichtet ausgelenkt und losgelassen werden, also

$$\varphi_{1(0)} = -\varphi_{2(0)} = \varphi_0 \quad (17)$$

Für die Koeffizienten ergibt sich

$$A_2 = 2\varphi_0 \quad (18)$$

$$A_1 = B_1 = B_2 = 0 \quad (19)$$

Daraus erhält man die Bewegungsgleichung

$$\varphi_{1(t)} = -\varphi_{2(t)} = \varphi_0 \cos(\omega_2 t) \quad (20)$$

In diesem Fall führen beide Pendel jeweils wieder eine harmonische Schwingung aus, allerdings gegengerichtet. Die Frequenz ist hierbei nun nicht mehr nur von den Pendelparametern, sondern auch von den Eigenschaften der Kopplung abhängig.

Schwebung

Die Schwebung erreicht man durch eine Auslenkung eines Pendelkörpers, während der andere in der Ruhelage belassen wird, also

$$\varphi_{1(0)} = 0 \quad (21)$$

$$\varphi_{2(0)} = \varphi_0 \quad (22)$$

Für die Koeffizienten ergibt sich

$$A_1 = -A_2 = \varphi_0 \quad (23)$$

$$B_1 = B_2 = 0 \quad (24)$$

Dartüber lassen sich die Schwingungsgleichungen gewinnen:

$$\varphi_{1(t)} = \varphi_0 \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \quad (25)$$

$$\varphi_{2(t)} = \varphi_0 \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \quad (26)$$

Wird die Bewegung eines einzelnen Pendels über die Zeit betrachtet, ergibt sich eine Schwebung: Die Oszillation des Pendels mit der Frequenz $\omega_I = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)$ wird von einer Einhüllenden mit der Frequenz $\omega_{II} = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)$ moduliert. Ein Pendel überträgt also immer mehr von seiner kinetischen Energie auf das jeweils andere, bis es stillsteht, und sich der Prozess wieder umkehrt.

Die Schwingungen zu den Eigenfrequenzen ω_1 und ω_2 bilden eine Basis für die möglichen Schwingungen des Doppelpendels. Allgemein lassen sich bei einer Kopplung von N Oszillatoren alle möglichen Schwingungszustände durch eine Linearkombination der Schwingungen zu den N Eigenfrequenzen, die das System dann hat, bilden. Die Schwebung beispielweise ist eine solche Linearkombination der Schwingungen zu ω_1 und ω_2 . Diese Basisschwingungen werden Normalschwingungen genannt.

Kopplungsgrad

Es wird als Maß für die Stärke der Kopplung der Kopplungsgrad κ definiert:

$$k = \frac{D'}{D + D'} \quad (27)$$

Mithilfe der Definitionen für ω_1 und ω_2 sieht man dass

$$\kappa = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} = \frac{T_2^2 - T_1^2}{T_2^2 + T_1^2} \quad (28)$$

Was einen praktikablen Weg zur Bestimmung des Kopplungsgrades durch die Messung der Periodendauern der Normalschwingungen liefert.

Messtechnik

Zur Messung der Pendelauslenkung wird der Hall-Effekt ausgenutzt. Es befindet sich dazu am Ende der Pendelachse im orthogonal zu dieser stehenden homogenen Feld zweier Stabmagnete ein Hall-Sensor. So erzeugt der Hall-Sensor eine zum Sinus der Pendelauslenkung proportionale Spannung. Diese wird von einem Analog-Digitalwandler diskretisiert und über die serielle Schnittstelle RS232 in einen Computer eingelesen, anschließend erfolgt die Umrechnung zum und Darstellung als Winkel automatisch, die Messdaten werden am Computer gespeichert. Es gibt außerdem Möglichkeiten zur Vermessung der Schwingungen mithilfe einiger Cursor im Messprogramm.

Versuchsanordnung und Durchführung

Material

- Zwei Messingpendel
- Kopplungsfeder aus Federbronze
- Fixer magnetischer Winkelmesser
- Analog-Digitalwandler
- Computer

Versuchsskizze

Durchführung

Es wird der Analog-Digitalwandler eingeschaltet, und das Messprogramm „gekoppeltes Pendel“ gestartet. Es wird die Winkelmessung auf die Ruhelage geeicht.

Nun wird ohne Einsatz der Feder die Schwingungsfrequenz jedes der beiden Pendel gemessen.

Für drei verschiedene Kopplungsgrade, das heißt Entfernungen der Federeinhängung zur Pendelachse, wird nun die symmetrische und die antisymmetrische Eigenschwingung angeregt. Es wird die Entfernung der Federeinhängung zur Pendelachse dokumentiert - Kleinere Entfernungen bedeuten hier intuitiverweise eine schwächere Kopplung, wie später noch gezeigt wird. Die Frequenzen der Eigenschwingungen werden gemessen.

Es werden nun beide Eigenschwingungen gleichzeitig angeregt, durch Loslassen des ersten Pendels, nachdem das andere aus der Maximalauslenkung freigegeben wurde. Es werden die Schwingungs- und Schwebungsfrequenzen für die vorher bereits eingestellten Kopplungen gemessen.

Zusätzliche werden noch qualitative Beobachtungen an über Magnetfelder gekoppelten elektrischen Schwingkreisen vorgenommen, die Schaltung ergibt sich aus dem Schaltplan:

²Wagner, Jens: „Physikalisches Praktikum PAP 2.2 für Studierende der Physik“, 2019

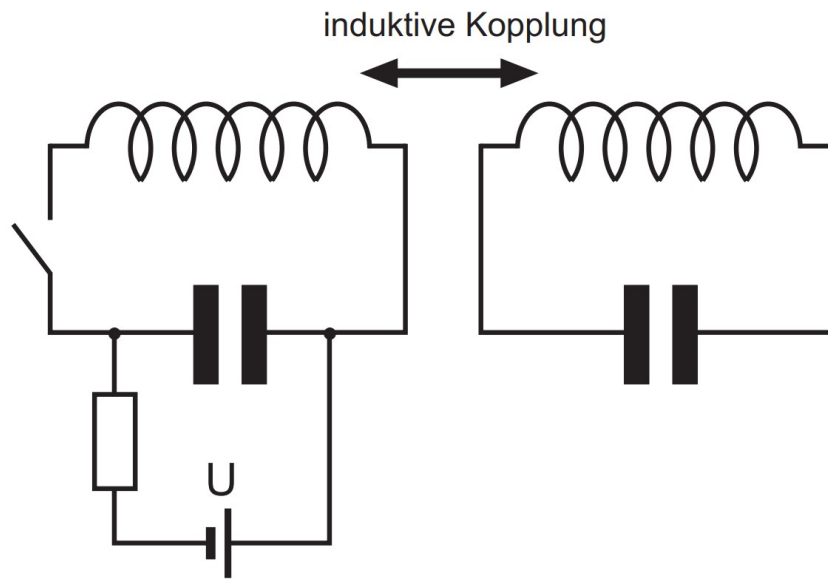


Abbildung 2: Der Aufbau der gekoppelten elektrischen Schwingkreise²

Durch die Variation des Abstandes wird die Kopplungsstärke variiert, und Beobachtungen angestellt. In dem zur Auswertung genutzten Video sind allerdings zu diesem letzten Versuchsteil keine Informationen gegeben, wodurch er im Folgenden entfällt.

Auswertung

Die hier genutzten Messdaten und Graphiken wurden am 31.03.2021 über die URL https://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/info/PAP2_2020/gekoppelte%20Pendel.zip bezogen. Alle Messdaten werden in ein Schwingungsspektrum überführt, und an die entsprechenden Maxima werden Gaußkurven angelegt, um ihre Position und Standardfehler abzulesen. Man erhält für die ungekoppelten Pendel:

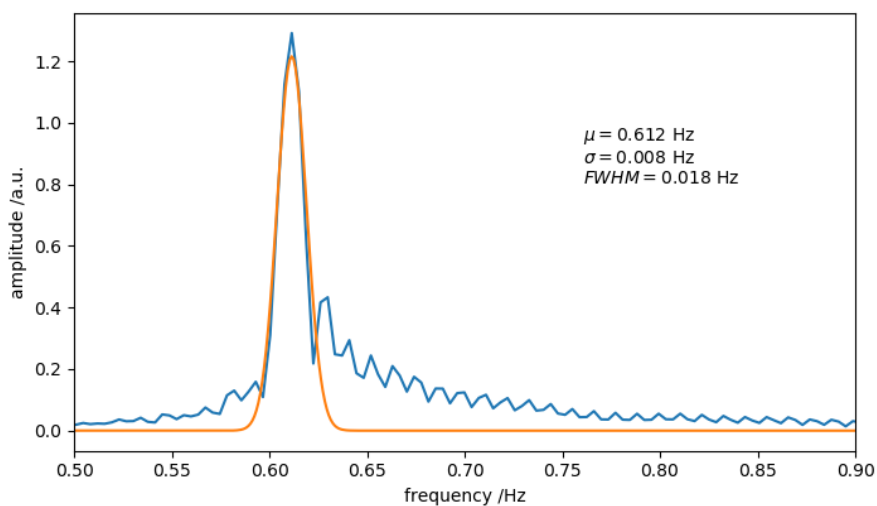


Abbildung 3: Frequenzspektrum der ungekoppelten Pendel

Für die symmetrische Schwingung erhält man:

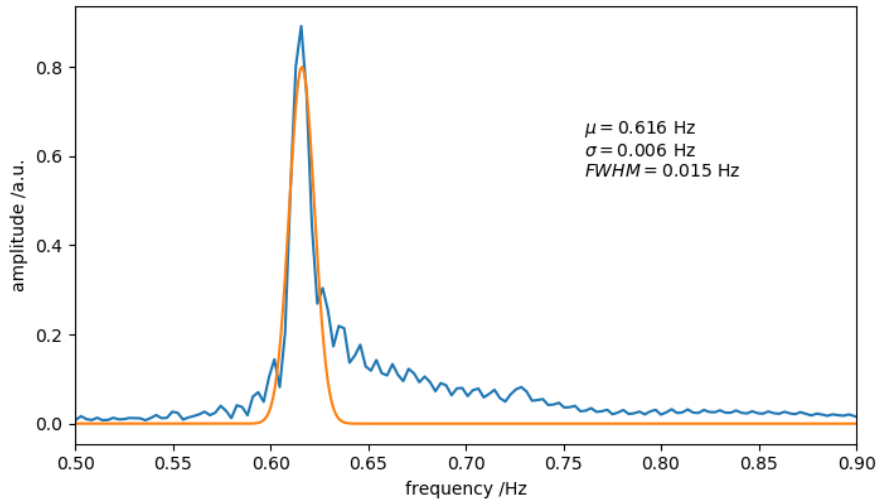


Abbildung 4: Frequenzspektrum der symmetrisch angeregten Pendel bei hohem Federabstand zur Pendelachse

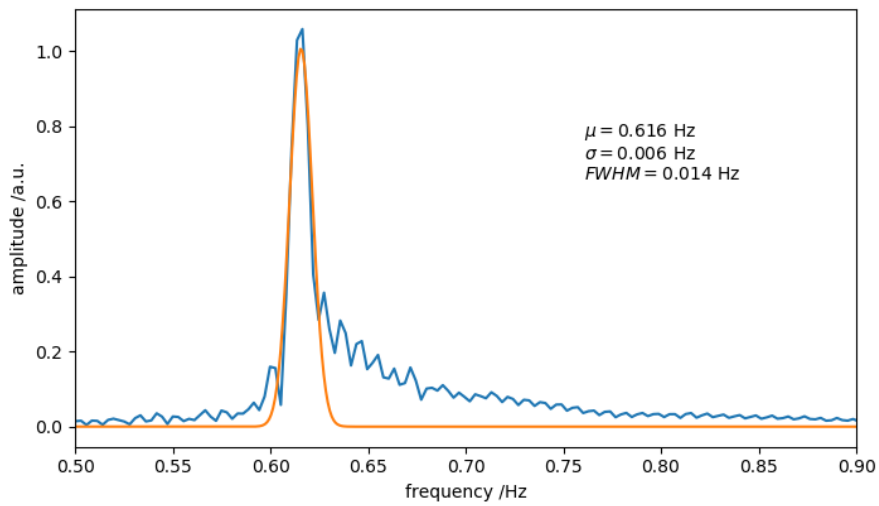


Abbildung 5: Frequenzspektrum der symmetrisch angeregten Pendel bei mittlerem Federabstand zur Pendelachse

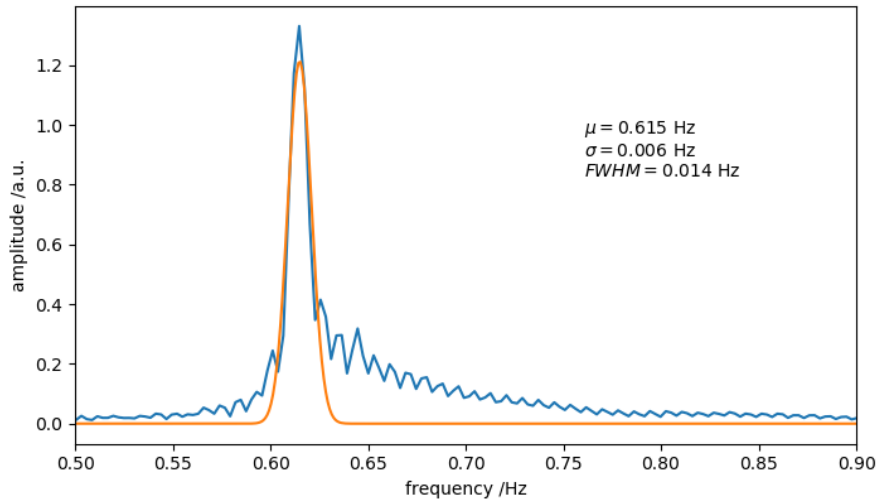


Abbildung 6: Frequenzspektrum der symmetrisch angeregten Pendel bei geringem Federabstand zur Pendelachse

Für die antisymmetrische Schwingung erhält man:

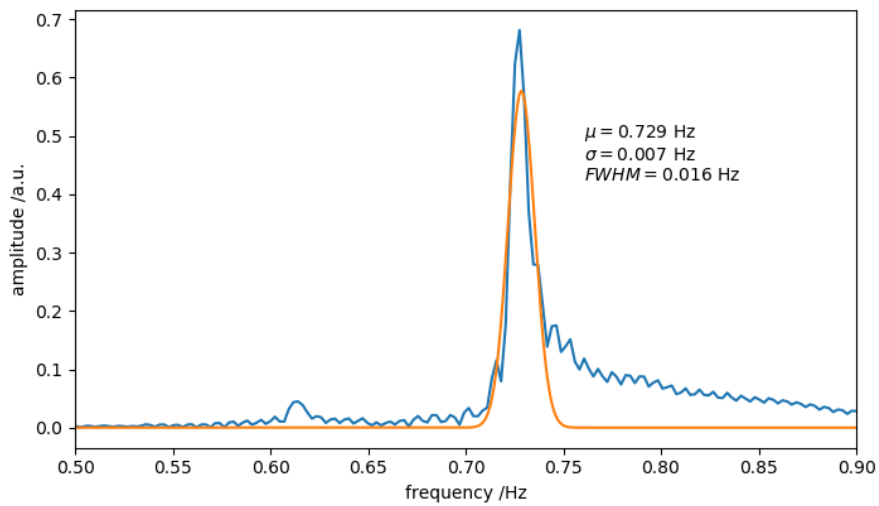


Abbildung 7: Frequenzspektrum der antisymmetrisch angeregten Pendel bei hohem Federabstand zur Pendelachse

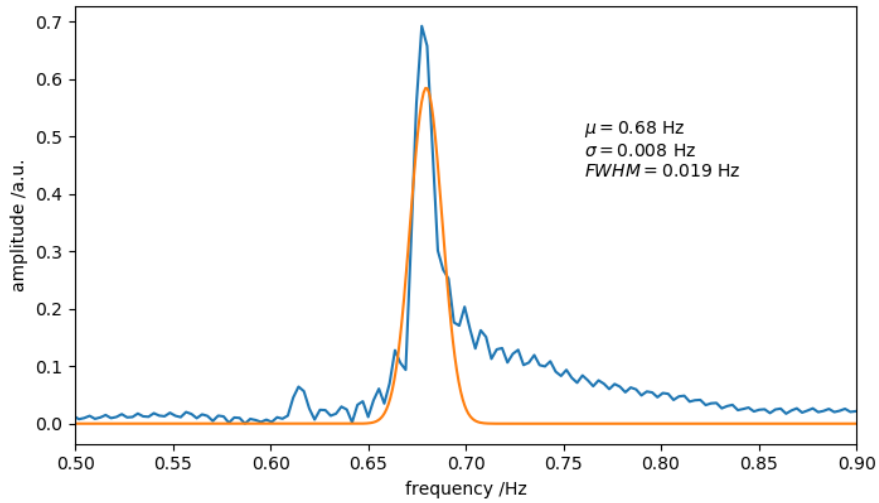


Abbildung 8: Frequenzspektrum der antisymmetrisch angeregten Pendel bei mittlerem Federabstand zur Pendelachse

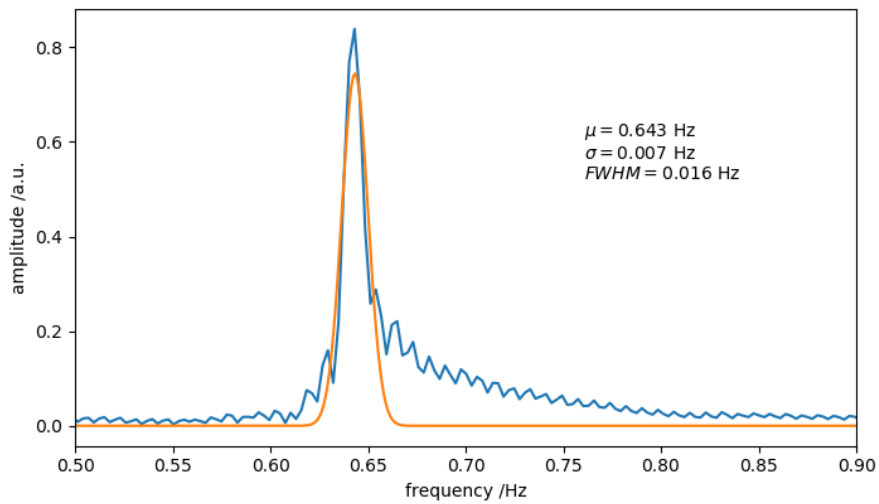


Abbildung 9: Frequenzspektrum der antisymmetrisch angeregten Pendel bei geringem Federabstand zur Pendelachse

Und für die Schwebungen:

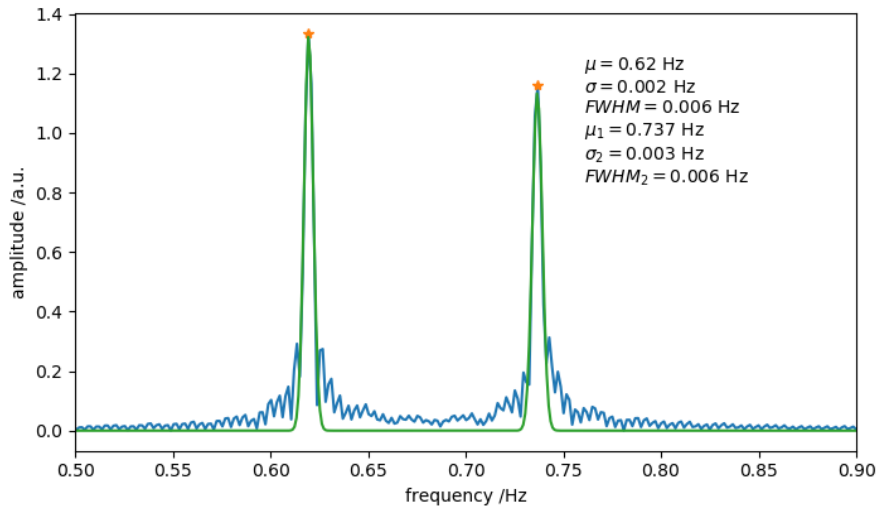


Abbildung 10: Frequenzspektrum der zur Schwebung angeregten Pendel bei hohem Federabstand zur Pendelachse

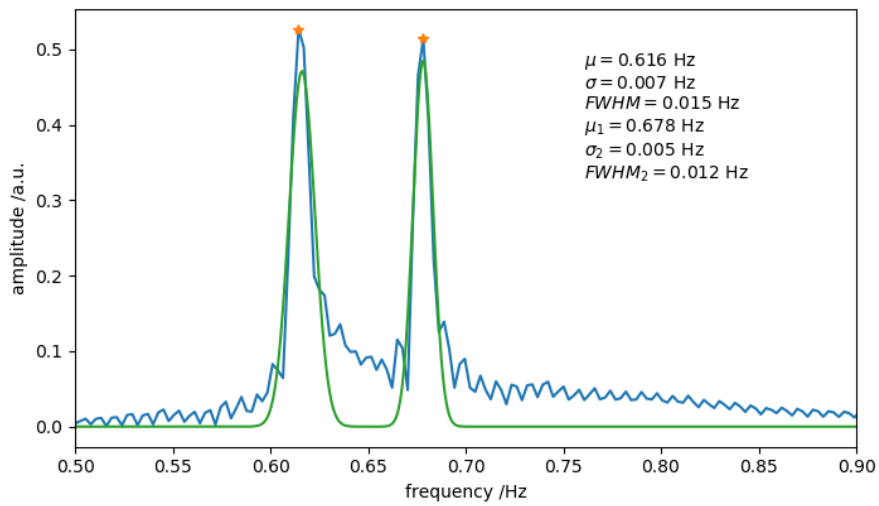


Abbildung 11: Frequenzspektrum der zur Schwebung angeregten Pendel bei mittlerem Federabstand zur Pendelachse

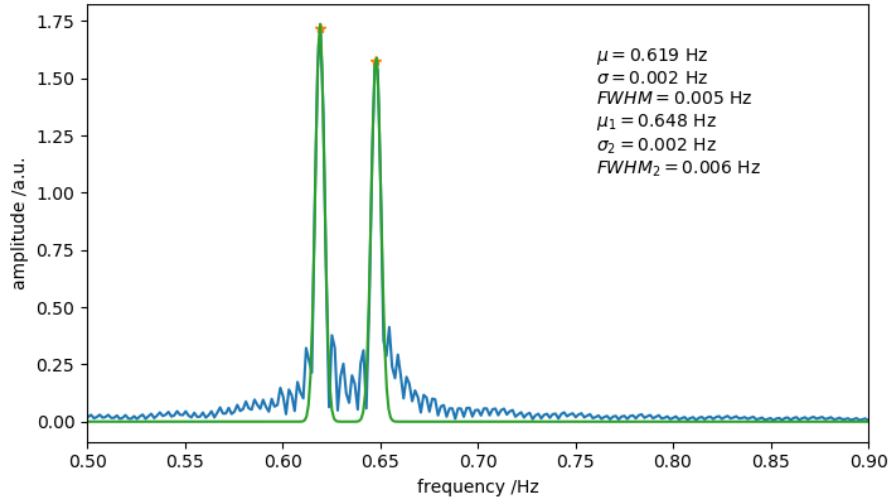


Abbildung 12: Frequenzspektrum der zur Schwebung angeregten Pendel bei geringem Federabstand zur Pendelachse

Bestimmung der Frequenzen

Aus den in den Diagrammen 4 bis 9 vermerkten Fitparametern werden nun die Kreisfrequenzen ω bestimmt, dazu wird genutzt dass der bestimmte Mittelwert $\mu = f$ der Frequenz, und $\omega = 2\pi f$, mit dem Standardfehler $\sigma = \Delta f$ folgt auch sofort der Fehler von ω als $\Delta\omega = 2\pi\Delta f = 2\pi\sigma$. So erhält man die Werte für die symmetrische Schwingung ω_1 , die antisymmetrische Schwingung ω_2 , und die Frequenzen der Schwebung ω'_1 und ω'_2 : Außerdem wurde die Frequenz

Tabelle 1: Frequenzen der drei Fälle bei verschiedenen Kopplungshöhen

Kopplungshöhe	ω_1 [Hz]	ω_2 [Hz]	ω'_1 [Hz]	ω'_2 [Hz]
Oben	$3,86 \pm 0,04$	$4,04 \pm 0,05$	$3,889 \pm 0,013$	$4,072 \pm 0,013$
Mittig	$3,87 \pm 0,04$	$4,17 \pm 0,06$	$3,87 \pm 0,05$	$4,26 \pm 0,04$
Unten	$3,87 \pm 0,04$	$4,58 \pm 0,05$	$3,896 \pm 0,013$	$4,63 \pm 0,04$

der ungekoppelten Schwingung zu $(3,85 \pm 0,06)$ Hz festgestellt.

Es können nun die Frequenzen ω_I und ω_{II} berechnet werden nach

$$\omega_I = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1) \quad (29)$$

$$\omega_{II} = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) \quad (30)$$

Wobei sich der Fehler ergibt nach

$$\Delta\omega_I = \Delta\omega_{II} = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta\omega_1^2 + \Delta\omega_2^2} \quad (31)$$

Es folgt damit zu analogen Bezeichnungen die Tabelle:

Tabelle 2: Einzel- und Schwebungsfrequenzen der drei Fälle bei verschiedenen Kopplungshöhen

Kopplungshöhe	ω_I [Hz]	ω_{II} [Hz]	ω'_I [Hz]	ω'_{II} [Hz]
Oben	$3,95 \pm 0,04$	$0,09 \pm 0,04$	$3,981 \pm 0,009$	$0,0920 \pm 0,0009$
Mittig	$4,07 \pm 0,04$	$0,20 \pm 0,04$	$4,07 \pm 0,04$	$0,20 \pm 0,04$
Unten	$4,23 \pm 0,04$	$0,34 \pm 0,04$	$4,263 \pm 0,022$	$0,367 \pm 0,022$

Bestimmung des Kopplungsgrades

Es wird im folgenden der jeweilige Kopplungsgrad bestimmt. Dabei wird verwendet, dass im Fall $D \gg D'$ die Näherung gilt:

$$\kappa = \frac{D'}{D} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\omega_1^2} \quad (32)$$

Man erhält dadurch für den Fehler $\Delta\kappa$:

$$\Delta\kappa = \sqrt{\left(\frac{\omega_2' \Delta\omega_2'}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_2'^2 \Delta\omega_1'}{\omega_1^3}\right)^2} \quad (33)$$

Insgesamt ergibt sich so für den Kopplungsgrad bei oberer Kopplungshöhe $\kappa_{oben} = 0,0482 \pm 0,0046$, bei mittlerer Kopplungshöhe $\kappa_{mitte} = 0,106 \pm 0,018$ und bei unterer Kopplungshöhe $\kappa_{unten} = 0,206 \pm 0,048$.

Bildet man die Verhältnisse der Kopplungsgrade κ_1/κ_2 , so sollten diese den Verhältnissen der Quadrate der gemessenen Kopplungslängen entsprechen. Für die reguläre Verhältnisbildung ergibt sich der Fehler als die Differenz der Relativfehler, für das Verhältnis $\kappa = \frac{l_1^2}{l_2^2}$ ergibt sich der Fehler zu

$$\Delta\kappa_1/\kappa_2 = \sqrt{\left(\frac{2l_1 \Delta l_1}{l_2^2}\right)^2 + \left(\frac{2l_1^2 \Delta l_2}{l_2^3}\right)^2} \quad (34)$$

Es ergeben sich zunächst nach regulärer Verhältnisbildung, mit der beschriebenen Fehlerrechnung, die Werte $\kappa_{unten}/\kappa_{mitte} = 1,9 \pm 0,5$, $\kappa_{unten}/\kappa_{oben} = 4,3 \pm 0,7$ und $\kappa_{mitte}/\kappa_{oben} = 2,2 \pm 2,2$.

Und es ergeben sich aus den Quadraten der Längen mit beschriebener Fehlerrechnung die Verhältnisse $\kappa_{unten}/\kappa_{mitte} = 1,818 \pm 0,012$, $\kappa_{unten}/\kappa_{oben} = 4,2 \pm 0,5$ und $\kappa_{mitte}/\kappa_{oben} = 2,31 \pm 0,12$.

Die Sigmaabweichung erhält man durch Division der Differenzen der Werte durch die quadratische Summe der einzelnen Absolutfehler. So ergeben sich als Sigmaabweichungen $\sigma_{\kappa_{unten}/\kappa_{mitte}} = 0,16$, $\sigma_{\kappa_{unten}/\kappa_{oben}} = 0,12$ und $\sigma_{\kappa_{mitte}/\kappa_{oben}} = 0,44$.

Diskussion

Zusammenfassung

Es wurden das Schwingungsverhalten zweier gekoppelter Oszillatoren beobachtet, und aus diesem heraus die Stärke ihrer Kopplung quantifiziert. Zudem konnte ein Vergleich der theoretischen Erwartung für das Verhalten der Kopplungsstärke unter Variationen der Federposition mit der Beobachtung erfolgen.

Diskussion

Bestimmung der Frequenzen

Betrachtet man Tabelle , so sieht man leicht ein, dass in der ersten Spalte die Ergebnisse für die Frequenz ω_1 in ihren Fehlerbereichen stets untereinander kompatibel sind, die Sigmaabweichungen sind also stets kleiner als eins, und damit völlig insignifikant. Diese Beobachtung deckt sich mit der Vorhersage, dass das Pendelverhalten im Fall der symmetrischen Schwingung nur von den Pendelparametern, und nicht etwa von der Stärke der Kopplung abhängig ist. Ebenso mit der Erwartung verträglich ist der Vergleich des symmetrischen Falls mit dem ungekoppelten Fall, hier weichen die Werte auch nur um 0,28 Sigabereiche voneinander ab, was die Unabhängigkeit von der Kopplung in diesem Fall weiter bestätigt.

Auf der anderen Seite erreichen die Sigmaabweichungen bei der Frequenz ω_2 Werte von bis zu 7 Sigabereichen. Dies entspricht völlig der Erwartung, da eine Kopplungsabhängigkeit bei der antisymmetrischen Schwingung hergeleitet wurde.

Betrachtet man die errechneten Frequenzen aus Tabelle , so fallen im Vergleich der ungestrichenen mit den gestrichenen Frequenzen wie erwartet nur insignifikante Abweichungen auf: Für die oberen Kopplungshöhen $0,76\sigma$ für ω_I

und $0,05\sigma$ für ω_{II} , für die mittlere Kopplungshöhen entsprechen sich die Werte sogar genau, die niedrigen Kopplungshöhen weichen um $0,7\sigma$ ab für ω_I und $0,6\sigma$ für ω_{II} . Man würde bei einer perfekten Einstellung der Parameter hier genaue Entsprechungen erwarten, wie sie im mittlere Fall sogar eintreten. Die leichten Abweichungen können durch leichte Fehler bei der Einstellung der Ausgangsparameter erklärt werden. Um die Ergebnisse nennenswert zu verbessern, könnte also beispielsweise der Einstell- und Auslösemechanismus maschinell umgesetzt werden, um menschliche Ungenauigkeiten zu vermeiden.

Bestimmung des Kopplungsgrades

Für das Verhalten der Kopplungsgrade erwartet man eine Proportionalität zum Quadrat der Länge - Dies wird überprüft durch die Verhältnisbildung gerade dieser quadrierten Werte, und Abgleich mit den entsprechenden Kopplungsgradverhältnissen: Für das Verhältnis „unten“ zu „mitte“ ergibt sich so eine Sigmaabweichung von $0,16$, für „unten“ zu „oben“ $0,12\sigma$, und für „mitte“ zu „oben“ die Abweichung $0,44\sigma$. Die Abweichungen sind damit insignifikant, und die Ergebnisse entsprechen dank ihrer guten Übereinstimmungen in ihren Fehlerbereichen voll der Erwartung. Die Übereinstimmung ließe sich vermutlich am einfachsten durch genauere Messungen der Längen verbessern, da die Messungen der Frequenzen bereits über viele Periodendauern erfolgten, und somit recht genau sein dürften.

Abschließendes Fazit

Der Versuch erlaubte es das grundlegende Prinzip gekoppelter Oszillatoren zu verstehen. Für den Fall zweier gekoppelter Oszillatoren wurden Vorhersagen für bestimmte Spezialfälle getroffen, die die Beobachtung voll bestätigen konnte. Leichte Verbesserungen der Genauigkeit ließen sich durch die Möglichkeit zur genaueren Einstellung, beziehungsweise Vermessung der Startparameter erzielen.