

Ausarbeitung Versuch 212 Zähigkeit von Flüssigkeiten

Lucas Eekhof

Einleitung

Motivation

Eine wichtige Größe bei der Betrachtung der mechanischen Eigenschaften von Flüssigkeiten ist die Viskosität. Dabei handelt es sich um ein Maß der Zähigkeit, also eine Größe die bestimmt, wie die Fließeigenschaften der Flüssigkeit sind, aber beispielsweise auch wie sich Reibungskräfte im betrachteten Medium verhalten. So ist die Kenntnis über diesen Wert zentral in der Fluidodynamik, in diesem Versuch sollen Verfahren erprobt werden, die zur Messung des Wertes dienen können.

Physikalischer Hintergrund

Bewegt sich ein Körper durch ein Fluid, bewirken zwischenmolekulare Kräfte eine schwache Anhaftung des Mediums an den Körper. Diese Adhäsion bewirkt im Endeffekt eine Reibungskraft auf den Körper. Um diese zu beschreiben werden zwei gleichförmige Platten von einer Schicht des Fluids getrennt. Die obere der beiden Platten wird nun mit der Geschwindigkeit v bewegt, dabei zieht sie eine Fluidschicht mit sich. Der Film über der ruhenden Platte steht ebenso aus Adhäsionsgründen still - Alleine aus der Forderung nach Stetigkeit muss es also einen Geschwindigkeitsgradienten entlang der Fluidschichten geben - Durch ihre Adhäsion aneinander beschleunigen, beziehungsweise bremsen sie sich gegenseitig.

Es lässt sich nun experimentell feststellen, dass die zur Bewegung der oberen Platte nötige Kraft F proportional zur Fläche A und der Geschwindigkeit v ist, sowie antiproportional zum Abstand der beiden Platten z . Bei einer Gleichförmigen Bewegung der oberen Platte lässt sich so die Kraftgleichung für die Reibungskraft F_r aufstellen:

$$F_r = \eta A \frac{v}{z} \quad (1)$$

Wobei das Verhältnis $\frac{v}{z}$ im allgemeinen Fall in das Differential $\frac{dv}{dz}$ übergeht:

$$F_r = \eta A \frac{dv}{dz} \quad (2)$$

Wobei es sich bei der Viskosität η um eine stoffspezifische Größe handelt.

Dieses Reibungsgesetz ist für beliebige Körper anwendbar, solange die Strömung des Fluids laminar ist, das heißt solange verschiedene Fließschichten übereinander gleiten, ohne sich zu vermischen. Wird die Viskosität zu niedrig, die Geschwindigkeit zu hoch, oder die Körpergeometrie zu disruptiv, verliert der Strom seine laminaren Eigenschaften, und wird turbulent. Es gilt dann nicht mehr das eben hergeleitete Newtonsche Reibungsgesetz, sondern eine wesentlich stärkere Reibung. Um diesen Übergang abschätzen zu können, wird die Reynoldszahl Re über die Kinetische Energie eines Volumenelements der Flüssigkeit E_{kin} , und die korrespondierenden Reibungsverluste $W_{Reibung}$ definiert:

$$Re = \frac{2E_{kin}}{W_{Reibung}} \quad (3)$$

Höhere Reynoldszahlen führen zu instabileren Strömungen. Dadurch wird ersichtlich, dass einer größere kinetische Energie die Strömung destabilisiert, wohingegen der Verlust durch innere Reibung den Strom stabilisiert. Der Übergang von einer laminaren zu einer turbulenten Strömung erfolgt dabei relativ scharf am kritischen Wert der Reynoldszahl Re_{kr} . In diesem Fall gilt dann $E_{kin} \gg W_{Reibung}$.

Durch die Einführung einer von der Geometrie des Strömungssystems abhängigen charakteristischen Länge lässt sich die Reynoldszahl umschreiben zu

$$Re = \frac{\rho v L}{\eta} \quad (4)$$

Mit der mittleren Strömungsgeschwindigkeit v und der Flüssigkeitsdichte ρ . Bei einer Strömung durch ein Rohr entspricht L gerade dem Rohrdurchmesser, die kritische Reynoldszahl liegt hier etwa bei 2300. Bei der Bewegung einer Kugel durch ein Fluid entspricht L gerade dem Kugeldurchmesser, hier ist die kritische Reynoldszahl viel kleiner, sie liegt bei etwa 1.

Bestimmung der Viskosität mit einem Kugelfallviskosimeter nach Stokes

Eine Möglichkeit, die Viskosität eines Mediums zu bestimmen, ist die Kugelfallmethode nach Stokes. Um die theoretische Grundlage zu schaffen, betrachtet man die auf eine Kugel wirkende Reibungskraft beim Fall durch das Medium mit konstanter Geschwindigkeit:

$$F_r = 6\pi\eta r v \quad (5)$$

Prinzipiell ist dieses sogenannte Stokesche Gesetz eine Näherung für Flüssigkeiten mit $Re < 1$ und effektiv unendlicher Ausdehnung. Wird nun in einem mit dem zu prüfenden Medium mit Dichte ρ_f gefüllten Fallrohr eine Kugel mit Radius r , Dichte ρ_k und Volumen V_k fallen gelassen, so wird die konstante Endgeschwindigkeit v_s erreicht, wenn die entgegen der Fallrichtung wirkende Reibungskraft, die Auftriebskraft $F_a = -\rho_f V_k g$ und Schwerkraft $F_g = \rho_k V_k g$ sich gegenseitig ausgleichen. Dann lässt sich die Kräftegleichung umstellen zu

$$\eta = \frac{2}{9} g \frac{\rho_k - \rho_f}{v_s} r^2 \quad (6)$$

Was es erlaubt durch die Messung der konstanten Sinkgeschwindigkeit v_s die Viskosität zu bestimmen.

Bestimmung der Viskosität über laminare Rohrströmung nach Hagen-Poiseuille

Alternativ lässt sich die Viskosität auch durch die Beobachtung des Volumenstroms einer laminaren Rohrströmung durch ein Rohr mit Radius R und Länge L errechnen. Damit eine Strömung durch das Rohr stattfindet, ist eine Druckdifferenz $\Delta p = p_1 - p_2$ zwischen den beiden Rohröffnungen bestehen. Im laminaren Fall lässt sich die Strömung durch das Rohr als abgleiten zylinderförmiger Schichten durch das Rohr beschreiben. Auf einen dieser Teilzylinder mit dem Radius $r < R$ wirkt aufgrund der Druckdifferenz die Kraft F_p :

$$F_p = \pi r^2 (p_1 - p_2) \quad (7)$$

Aber es wirkt auch die Newtonsche Reibungskraft

$$F_r = -2\pi r L \eta \frac{dv}{dr} \quad (8)$$

Damit die Strömung mit konstanter Geschwindigkeit erfolgt, müssen sich die Kräfte wieder gegenseitig ausgleichen, das heißt:

$$-2\pi r L \eta \frac{dv}{dr} = \pi r^2 (p_1 - p_2) \quad (9)$$

Umgestellt nach dem Geschwindigkeitsgradienten ergibt sich

$$\frac{dv}{dr} = \frac{p_1 - p_2}{2\eta L} r \quad (10)$$

Integriert man über r und nutzt die Randbedingung $v_{(R)} = 0$, so erhält man für die Geschwindigkeitsverteilung über den Rohrradius:

$$v_{(r)} = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L} (R^2 - r^2) \quad (11)$$

Anschaulich handelt es sich bei dieser Geschwindigkeitsverteilung um ein Paraboloid, eine Stromfront erstreckt sich also radialsymmetrisch parabelförmig in das Rohr hinein.

Um nun den Volumenstrom durch das Rohr zu bestimmen, wird über seine Querschnittsfläche integriert:

$$\frac{dV}{dt} = \int_0^R 2\pi r v_{(r)} dr = \frac{\pi (p_1 - p_2) R^4}{8\eta L} \quad (12)$$

Dies ist das Gesetz von Hagen-Poiseuille. Sind also Länge, Rohrradius und Druckdifferenz bekannt, kann auch durch eine Messung des Volumenstroms durch ein Rohr die Viskosität einer Flüssigkeit bestimmt werden.

Versuchsanordnung und Messungen

Material

- Mit Polyethylenglykol gefüllter Zylinder Glaszylinder mit Messskala, mit Präzisionskapillare ($(100,0 \pm 0,5)$ mm Länge, $(1,50 \pm 0,01)$ mm Durchmesser)
- Hostaform-C-Kugeln mit Durchmessern von 2 mm bis 9 mm in 1 mm-Schritten, wobei die 7 mm-Kugel 7,144 mm misst, die Genauigkeit ist 1 %
- Thermometer
- Pinzetten
- Bechergläser
- Maßstab
- Stoppuhr

Versuchsskizze

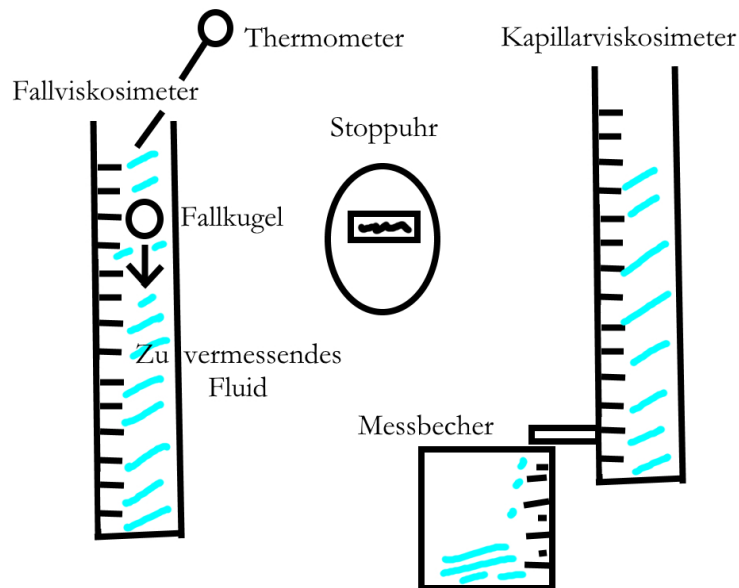


Abbildung 1: Skizze des Versuchsaufbaus mit wesentlichen Materialien

Bestimmung der Viskosität mit einem Kugelfallviskosimeter nach Stokes

Zur Anwendung der Fallmethode wird die Fallzeit t der Kugeln mit Radius r über eine Strecke s im befüllten Glaszylinder gemessen. Außerdem wird die Temperatur der Flüssigkeit gemessen. Dabei ist zu beachten, die Messungen erst nach Erreichen der Endgeschwindigkeit zu beginnen. Um zu verhindern, dass anhaftende Luftblasen den Auftrieb vergrößern, werden die Kugeln vor dem Einbringen in das Fallrohr die Kugeln in einem separaten Becherglas mit der Flüssigkeit benetzt, und darauf mit der Pinzette in das Fallrohr gegeben. Es wird für jeden der Kugelradien die Messung fünf mal wiederholt. Es wird des Weiteren der Innendurchmesser des Fallrohres notiert.

Bestimmung der Viskosität über laminare Rohrströmung nach Hagen-Poiseuille

Es wird unter dem Ausfluss der Präzisionskapillare ein Becherglas positioniert, der Hahn wird geöffnet, und das Erreichen einer konstanten Strömung abgewartet, das heißt bis die Tropffrequenz sich stabilisiert hat. Um dann die Messung zu beginnen wird ein leerer Zylinder unter dem Ausfluss platziert, und beim Starten einer Stoppuhr die Anfangshöhe h_A der Flüssigkeitssäule notiert. Es werden dann die Zeiten für das Erreichen einer Füllhöhe von jeweils 5 cm^3 bis 25 cm^3 in 5 cm^3 -Schritten notiert.

Auswertung

Alle in dieser Auswertung verwendeten Daten wurden dem Messprotokoll unter https://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/info/PAP2_2020/212.pdf am 31.03.2021 entnommen, welches sich im Anhang findet. Die verwendeten Scripte sind der Ausarbeitung beigelegt.

Bestimmung der Viskosität mit einem Kugelfallviskosimeter nach Stokes

Betrachtet man Gleichung (6), so lässt sich bei einer Auftragung der Kugelsinkgeschwindigkeit v_{lam} über das Quadrat des Radius r ein gerader Verlauf erwarten, nach

$$v_{lam} = \frac{2}{9}g \frac{\rho_k - \rho_f}{\eta} r^2 \quad (13)$$

Wegen praktischer Ungenauigkeiten der Kugeldichte wird hier allerdings das Verhältnis $\frac{v_{lam}}{\rho_k - \rho_f}$ des Mittelwertes der gemessenen Geschwindigkeiten und der Dichten gegen r^2 aufgetragen. Dazu werden die Kugeldichten mit ihren Fehlern in Arrays überführt, und die Dichte der Flüssigkeit mit Rücksichtnahme auf ihre gemessene Temperatur von $(23,0 \pm 0,5)^\circ\text{C}$ aus einem Diagramm im Script ausgelesen¹ und ergibt sich zu $(1,1464 \pm 0,0005) \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. Der Fehler des Verhältnisses ergibt sich aus

$$\Delta v = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial v_{lam}} \Delta v_{lam}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \rho_k} \Delta \rho_k\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \rho_f} \Delta \rho_f\right)^2} \quad (14)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_f - \rho_k} \Delta v_{lam}\right)^2 + \left(\frac{v_{lam}}{(\rho_f - \rho_k)^2} \Delta \rho_k\right)^2 + \left(\frac{v_{lam}}{(\rho_f - \rho_k)^2} \Delta \rho_f\right)^2} \quad (15)$$

$$= v \sqrt{\left(\frac{\Delta v_{lam}}{v_{lam}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \rho_k}{\rho_f - \rho_k}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \rho_f}{\rho_f - \rho_k}\right)^2} \quad (16)$$

Man erhält:

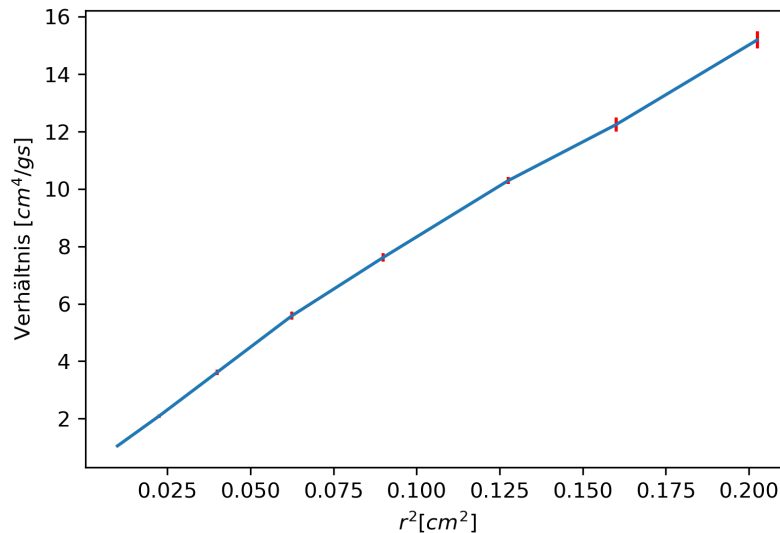


Abbildung 2: Der Verlauf des Verhältnisses über das Quadrat des Kugelradius

Da das Stokessche Gesetz nur für unendlich ausgedehnte Flüssigkeiten gilt, wird die Geschwindigkeit durch den limitierten inneren Fallrohrradius R nach unten verfälscht, dabei wird dieser Fehler mit dem Kugelradius größer.

¹Wagner, Jens: „Physikalisches Praktikum PAP 2.2 für Studierende der Physik“, 2019

Es wird daher der Ladenburgsche Korrekturfaktor λ eingesetzt:

$$F_r = 6\pi\eta r v \lambda \quad (17)$$

Mit dem dem Messprotokoll zu entnehmenden Betrag des inneren Rohradius R :

$$\lambda = 1 + \frac{2,1r}{R} \quad (18)$$

Mit dem Fehler von

$$\Delta\lambda = \sqrt{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial r}\Delta r\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial R}\Delta R\right)^2} \quad (19)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2,1}{R}\Delta r\right)^2 + \left(\frac{2,1r}{R^2}\Delta R\right)^2} \quad (20)$$

Dies führt dazu, dass die Sinkgeschwindigkeiten der Kugeln mit dem Korrekturfaktor multipliziert werden müssen, der neue Relativfehler ergibt sich durch quadratische Addition des Relativfehlers zum vorherigen Relativfehler: Der kleinste Korrekturfaktor ist hier der für den ersten Radius, 1,028, sollte also schon nicht vernachlässigt werden. Es ergibt sich:

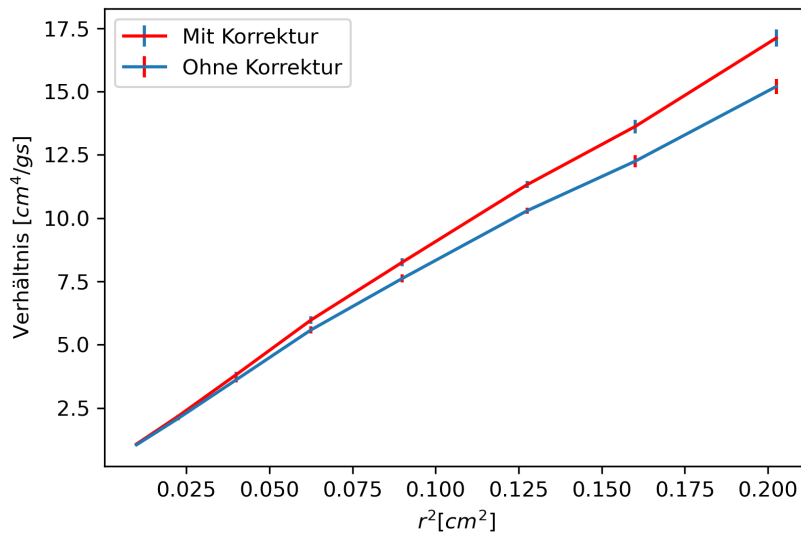


Abbildung 3: Der Verlauf nach der Ladenburg-Korrektur

Es wird nun auf die korrigierte Gerade eine Ursprungsgerade gefittet:

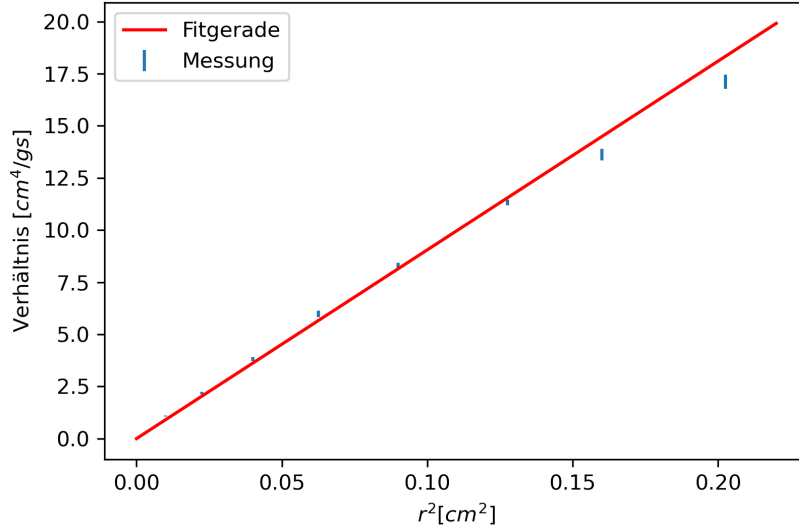


Abbildung 4: Die korrigierten Werte mit einer Fitgeraden

Für diese ergibt sich eine Steigung m von $(90,5 \pm 2,3) \frac{\text{cm}^2}{\text{g s}}$ mit Standardfehler. Stellt man nun (13) entsprechend um, ergibt sich für die Viskosität:

$$\eta = \frac{2}{9} g \frac{\rho_k - \rho_f}{v_{lam}} r^2 = \frac{2}{9} g \left(\frac{v_{lam}}{(\rho_k - \rho_f) r^2} \right)^{-1} = \frac{2}{9} \frac{g}{m} \quad (21)$$

Es erhält sich hierbei der Relativfehler der Steigung. Setzt man für g den Wert $981 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$ ein erhält man für die Viskosität $\eta = (2,409 \pm 0,062) \frac{\text{g}}{\text{cm s}} = (0,2409 \pm 0,0062) \text{ Pa s}$.

Nun lassen sich aus diesem Wert für die Viskosität für jeden Kugelradius nach (13) wieder die theoretisch zu erwartenden Geschwindigkeiten v_{lam} bestimmen, der Fehler ergibt sich hierbei nach

$$\Delta v_{lam} = \sqrt{\left(\frac{\partial v_{lam}}{\partial \rho_k} \Delta \rho_k \right)^2 + \left(\frac{\partial v_{lam}}{\partial \rho_f} \Delta \rho_f \right)^2 + \left(\frac{\partial v_{lam}}{\partial \eta} \Delta \eta \right)^2 + \left(\frac{\partial v_{lam}}{\partial r} \Delta r \right)^2} \quad (22)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2gr^2}{9\eta} \Delta \rho_k \right)^2 + \left(\frac{2gr^2}{9\eta} \Delta \rho_f \right)^2 + \left(\frac{2gr^2 (\rho_f - \rho_k)}{9\eta^2} \Delta \eta \right)^2 + \left(\frac{4gr (\rho_f - \rho_k)}{9\eta} \Delta r \right)^2} \quad (23)$$

$$= v_{lam} \sqrt{\left(\frac{\Delta \rho_k}{\rho_f - \rho_k} \right)^2 + \left(\frac{\Delta \rho_f}{\rho_f - \rho_k} \right)^2 + \left(\frac{\Delta \eta}{\eta} \right)^2 + \left(\frac{2\Delta r}{r} \right)^2} \quad (24)$$

So erhält man für die Kugelradien, und ihre tatsächlich gemessenen Geschwindigkeiten v :

Tabelle 1: Aufgrund der Viskosität zu erwartenden und tatsächliche Fallgeschwindigkeiten

Radius [cm]	v_{lam} [$\frac{cm}{s}$]	v [$\frac{cm}{s}$]	Sigmaabweichung	$\frac{v}{v_{lam}}$
0,2	0,837±0,024	0,2426±0,0051	24,791854	0,837±0,024
0,3	1,882±0,054	0,483±0,013	25,491284	1,882±0,054
0,4	3,346±0,097	0,836±0,021	25,4296	3,346±0,097
0,5	5,23±0,16	1,291±0,029	25,134007	5,23±0,16
0,6	7,53±0,23	1,761±0,030	25,168324	7,53±0,23
0,7144	10,67±0,34	2,379±0,013	24,910062	10,67±0,34
0,8	12,23±0,40	2,585±0,042	24,233093	12,23±0,40
0,9	15,84±0,53	3,284±0,052	23,689973	15,84±0,53

Es wird außerdem für jeden Kugelradius die Reynoldszahl bestimmt nach

$$Re = \frac{2r\rho_f v_{lam}}{\eta} \quad (25)$$

Dabei ergibt sich der Fehler nach

$$\Delta Re = \sqrt{\left(\frac{\partial Re}{\partial r} \Delta r\right)^2 + \left(\frac{\partial Re}{\partial \rho_f} \Delta \rho_f\right)^2 + \left(\frac{\partial Re}{\partial v_{lam}} \Delta v_{lam}\right)^2 + \left(\frac{\partial Re}{\partial \eta} \Delta \eta\right)^2} \quad (26)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2\rho_f v_{lam}}{\eta} \Delta r\right)^2 + \left(\frac{2r v_{lam}}{\eta} \Delta \rho_f\right)^2 + \left(\frac{2\rho_f r}{\eta} \Delta v_{lam}\right)^2 + \left(\frac{2\rho_f r v_{lam}}{\eta^2} \Delta \eta\right)^2} \quad (27)$$

$$= Re \sqrt{\left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \rho_f}{\rho_f}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v_{lam}}{v_{lam}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \eta}{\eta}\right)^2} \quad (28)$$

So erhält man die Werte

Tabelle 2: Die Reynoldszahlen zu den verschiedenen Radien

Radius [cm]	Reynoldszahl
0,2	0,0462±0,0019
0,3	0,1378±0,0055
0,4	0,318±0,013
0,5	0,614±0,025
0,6	1,001±0,041
0,7144	1,618±0,068
0,8	1,968±0,084
0,9	2,81±0,13

Trägt man die Reynoldszahlen logarithmisch gegen die Geschwindigkeitsverhältnisse auf, so lässt sich grob ein linearer Verlauf erahnen:

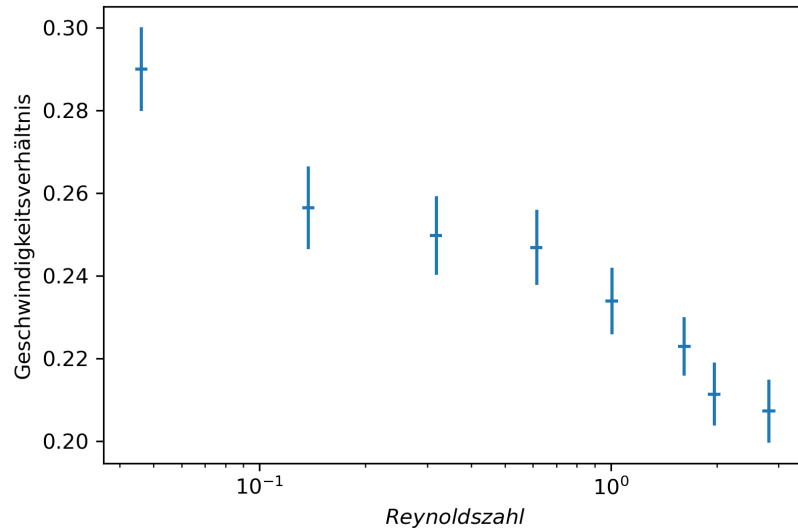


Abbildung 5: Die erhaltenen Reynoldszahlen gegen die vorher errechneten Geschwindigkeitsverhältnisse

In dieser Geraden lässt sich ein Knick bei der ungefähren kritischen Reynoldszahl von 0,6 feststellen, bei einem Geschwindigkeitsverhältnis von circa 0,7. An diesem Knick findet der Übergang von einer laminaren zur turbulenten Strömung statt.

Bestimmung der Viskosität über laminare Rohrströmung nach Hagen-Poiseuille

Um die Viskosität über Gleichung (12) nach Hagen-Poiseuille zu bestimmen, muss zunächst die Druckdifferenz Δp zwischen den beiden Rohrenden bestimmt werden. Da die den Druck induzierende Füllhöhe variabel ist, wird zur Berechnung der Mittelwert von Anfangs- und Endhöhe h_A und h_E genutzt:

$$\Delta p = \rho_f g \frac{h_A + h_E}{2} \quad (29)$$

Mit einem Fehler von

$$\Delta \Delta p = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta p}{\partial \rho} \Delta \rho\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta p}{\partial h_A} \Delta h_A\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta p}{\partial h_E} \Delta h_E\right)^2} \quad (30)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{g(h_A + h_E)}{2} \Delta \rho\right)^2 + \left(\frac{\rho g}{2} \Delta h_A\right)^2 + \left(\frac{\rho g}{2} \Delta h_E\right)^2} \quad (31)$$

$$= \Delta p \sqrt{\left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h_A}{h_A + h_E}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h_E}{h_A + h_E}\right)^2} \quad (32)$$

Genutzt werden die bereits verwendeten Werte $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ und $\rho_f = (1146,4 \pm 0,5) \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, so erhält man (6163 ± 17) Pa für die Druckdifferenz.

Außerdem wird der Volumenstrom durch die Kapillare benötigt - Um diesen genauestmöglich zu bestimmen, werden die verschiedenen Zwischenmesswerte über die Zeit aufgetragen und eine lineare Funktion angefitet. Die Skalenteilung des Messbechers ist wie im Video erkenntlich 0,5 ml, es wird der Fehler des Volumens daher auf 0,25 ml geschätzt. Der Fehler der Zeit wird auf 0,3 s geschätzt. So ergibt sich:

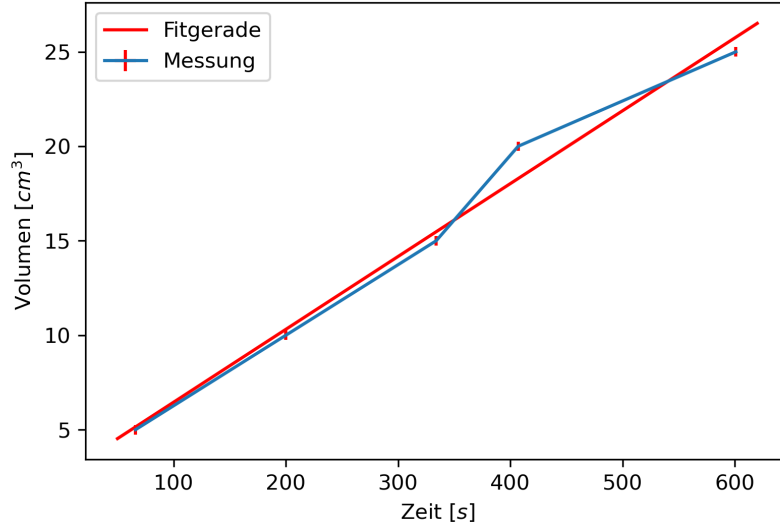


Abbildung 6: Füllvolumen über Zeit mit Fitgerade

Es wurde ein Ordinatenabschnitt zugelassen, um eventuelle Fehler beim Messstart zu kompensieren, dieser blieb beim Fit aber vernachlässigbar. Die Geradensteigung, und damit der Volumenstrom beträgt $(0,0385 \pm 0,0028) \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$.

Aus dem Volumenstrom s und der Druckdifferenz lässt sich nun zusammen mit dem Kapillardurchmesser $D = \frac{R}{2} = (0,750 \pm 0,005) \text{ mm}$ und der -länge $L = (100,0 \pm 0,5) \text{ mm}$ die Viskosität bestimmen, da aus dem Gesetz von Hagen-Poiseuille folgt dass:

$$\eta = \frac{\pi \Delta p R^4}{8sL} \quad (33)$$

Dabei ergibt sich der Fehler nach

$$\Delta \eta = \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial p} \Delta p\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial R} \Delta R\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial s} \Delta s\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial L} \Delta L\right)^2} \quad (34)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\pi R^4}{8Ls} \Delta p\right)^2 + \left(\frac{\pi R^3 p}{2Ls} \Delta R\right)^2 + \left(\frac{\pi R^4 p}{8Ls^2} \Delta s\right)^2 + \left(\frac{\pi R^4 p}{8L^2 s} \Delta L\right)^2} \quad (35)$$

$$= \eta \sqrt{\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 + \left(\frac{4\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta s}{s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2} \quad (36)$$

Was also insgesamt liefert $\eta = (0,199 \pm 0,016) \text{ Pa}\cdot\text{s}$.

Aus der Viskosität kann nun die Reynoldszahl der Kapillare berechnet werden nach Gleichung (4), wobei die Charakteristische Länge L hier dem Rohrdurchmesser $2R$ entspricht. Außerdem wird die Geschwindigkeit der betrachteten Flüssigkeit benötigt. Da hier auf Laminarität geprüft werden soll, wird die maximale Geschwindigkeit eingesetzt, die sich nach (11) in der Mitte des Rohres findet, sie ist

$$v_{max} = v_{(0)} = \frac{\Delta p}{4\eta L} R^2 \quad (37)$$

Setzt man diese Geschwindigkeit in die besprochene Gleichung der Reynoldszahl ein, erhält man

$$Re = \frac{\rho_f \Delta p}{2\eta^2 L R} \quad (38)$$

Der Fehler ergibt sich also nach

$$\Delta Re = \sqrt{\left(\frac{\partial Re}{\partial \rho_f} \Delta \rho_f\right)^2 + \left(\frac{\partial Re}{\partial \Delta p} \Delta \Delta p\right)^2 + \left(\frac{\partial Re}{\partial \eta} \Delta \eta\right)^2 + \left(\frac{\partial Re}{\partial L} \Delta L\right)^2 + \left(\frac{\partial Re}{\partial R} \Delta R\right)^2} \quad (39)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\Delta p}{2\eta^2 LR} \Delta \rho_f\right)^2 + \left(\frac{\rho_f}{2\eta^2 LR} \Delta \Delta p\right)^2 + \left(\frac{\Delta p \rho_f}{\eta^3 LR} \Delta \eta\right)^2 + \left(\frac{\Delta p \rho_f}{2\eta^2 L^2 R} \Delta L\right)^2 + \left(\frac{\Delta p \rho_f}{2\eta^2 LR^2} \Delta R\right)^2} \quad (40)$$

$$= Re \sqrt{\left(\frac{\Delta \rho_f}{\rho_f}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \Delta p}{\Delta p}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta \eta}{\eta}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2} \quad (41)$$

Was also insgesamt liefert: $Re = 1189 \pm 192$. Für eine Kapillare werden Strömungen erst ab der kritischen Schwelle von $Re_{kr} = 2300$ turbulent - Die beobachtete Strömung ist also auch unter Beachtung des Fehlerintervalls, und unter Betrachtung der Maximalgeschwindigkeit noch eindeutig weit im laminaren Bereich.

Diskussion

Vergleich der beiden Methoden

Beim Vergleich der beiden Methoden können nur die Viskositäten betrachtet werden, die Reynoldszahlen sind aufgrund der verschiedenen Szenarien nicht sinnvoll vergleichbar. Beim Vergleich der Viskositätenergebnisse von $(0,2409 \pm 0,0062)$ Pa s für die Methode nach Stokes, und $(0,199 \pm 0,016)$ Pa s für die Methode nach Hagen-Poiseuille fällt eine leichte Abweichung um 2,44 Sigmapbereiche auf. Dies entspricht aber immer noch der Theorie, nach der die beiden Werte die gleiche Größe beschreiben sollten, da ihre Abweichung voneinander noch unter der Signifikanzschwelle von 3σ liegt.

Abschließendes Fazit

Insgesamt konnten in diesem Versuch die Prinzipien zur Bestimmung von Viskositäten und Reynoldszahlen verstanden und angewandt werden, dabei zeigt sich eine Kompatibilität der Ergebnisse beider Methoden. Leichte Abweichungen könnten eventuell durch längere Messreihen behoben werden, um statistische Fehler zu minimieren, und eventuelle systematische Fehler zu identifizieren.

Anhang Messprotokoll

Messprotokoll

Versuch 212: Zähigkeit von Flüssigkeiten

2.4.2020

Messaufbau

Messzylinder aus Hartglas mit Messskala, gefüllt mit Polyethylenglykol. Am unteren Teil des Zylinders befindet sich eine Präzisionskapillare (Länge: $100 \text{ mm} \pm 0,5 \text{ mm}$, Kapillardurchmesser $1,5 \text{ mm} \pm 0,01 \text{ mm}$)

- Kugeln mit folgenden Durchmessern: $2r = 2,0 / 3,0 / 4,0 / 5,0 / 6,0 / 7,144 / 8,0 / 9,0 \text{ mm} (\pm 1\%)$
- Thermometer
- Pinzetten, Bechergläser
- Maßstab
- Stoppuhren

Messwerte

Temperatur der Flüssigkeit: $T = (23 \pm 0,5) \text{ }^\circ\text{C}$

Innendurchmesser des Fallrohrs $D = 75 \text{ mm} \pm 1\%$

Luftdruck: $(1000,3 \pm 0,2) \text{ hPa}$

Tabelle 1: Messung der Fallzeiten der verschiedenen Kugeln. Die Messungen wurden für jeden Kugeldurchmesser fünfmal wiederholt:

Durchmesser [mm]	Messstrecke [mm]	Fallzeiten [s]
2,0	50	21.45 / 20.37 / 20.51 / 20.59 / 20.17
3,0	50	10.42 / 10.67 / 10.48 / 9.86 / 10.40
4,0	100	11.70 / 12.02 / 12.40 / 12.15 / 11.58
5,0	100	7.84 / 7.46 / 7.81 / 7.96 / 7.68
6,0	200	11.39 / 11.23 / 11.72 / 11.20 / 11.26
7,144	200	8.48 / 8.43 / 8.36 / 8.40 / 8.36
8,0	200	7.56 / 7.68 / 7.73 / 7.80 / 7.93
9,0	200	6.06 / 5.95 / 6.14 / 6.24 / 6.07

Tabelle 2: Messung der Ausflusszeit für verschiedene Volumina:

Flüssigkeitsmenge [ml]	Ausflusszeit [Minuten ' Sekunden'']
5	1' 06''
10	3' 20''
15	5' 34''
20	7' 47''
25	10' 01''

Höhe der Flüssigkeitssäule vor der Messung: $h_1 = (556 \pm 2) \text{ mm}$

Höhe der Flüssigkeitssäule nach der Messung: $h_2 = (540 \pm 2) \text{ mm}$