

Ausarbeitung Versuch 213 Kreisel

Lucas Eekhof

Einleitung

Motivation

Auf vielen Skalen lassen sich Kreiselphänomene betrachten: Von der Rotation von Molekülen auf der Nanoskala, bis hin zum Verhalten der Erdrotation in makroskopischen Skalen, überall kann mechanisches Verhalten durch Kreisel modelliert werden. Technisch finden Kreisel ihre Anwendung zur Navigation und Sensorik aufgrund ihrer orientierungserhaltenden Eigenschaften, oder auch durch ihre Dynamik und Kraftausübung zur Orientierungssteuerung in der Raumfahrt.

Durch grundlegende Mechanische Überlegungen lassen sich Vorhersagen über die Dynamik von Kreisbewegungen treffen, diese sollen in diesem Versuch experimentell überprüft werden.

Physikalischer Hintergrund

Kräftefreier symmetrischer Kreisel

Jeder starre, rotierende Körper ist ein Kreisel. Bei einer Lagerung im Schwerpunkt induzieren Gewichtskräfte kein Drehmoment \vec{M} , wodurch der Drehimpuls \vec{L} konstant bleibt, der Kreisel heißt dann kräftefrei. Wenn zwei der drei Hauptträgheitsmomente des Kreisels gleich groß sind, wird der Kreisel symmetrisch genannt.

Um einen Kreisel zu beschreiben werden drei charakteristische Achsen herangezogen: Die Symmetrieachse, oder Figurenachse \vec{F} , die Drehimpulsachse \vec{L} und die Rotationsachse $\vec{\omega}$.

Bei einer Fixierung an der Symmetrieachse, und Rotation so, dass ihre Richtung konstant bleibt, fallen gerade alle diese Achsen zusammen und bleiben konstant. Dies ist der einzige Fall, in dem Rotation und Drehimpuls gleichgerichtet sind, das Hauptträgheitsmoment vermittelt dann zwischen ihnen.

Im allgemeinen Fall nehmen alle charakteristischen Achsen verschiedene Richtungen an, der Kreisel führt dann eine Nutationsbewegung aus. Dieser Fall kann praktisch durch einen Kraftstoß auf den Kreisel im konstanten Fall erreicht werden. Der Drehimpuls bleibt in diesem Fall konstant, die Symmetrieachse rotiert auf einem Kegelmantel mit der Nutationsfrequenz $\vec{\omega}_N$ um seine Achse, und führt mit der Frequenz $\vec{\omega}_F$ eine Eigenrotation durch. Die Drehachse ergibt sich also als Superposition der Bewegungen um diese verschiedenen Achsen. Es beschreibt dann die momentane Drehrichtung $\vec{\omega}$ die Drehrichtung des Kreisels zu einem bestimmten Zeitpunkt:

¹Wagner, Jens: „Physikalisches Praktikum PAP 2.1 für Studierende der Physik“, 2019, S. 22

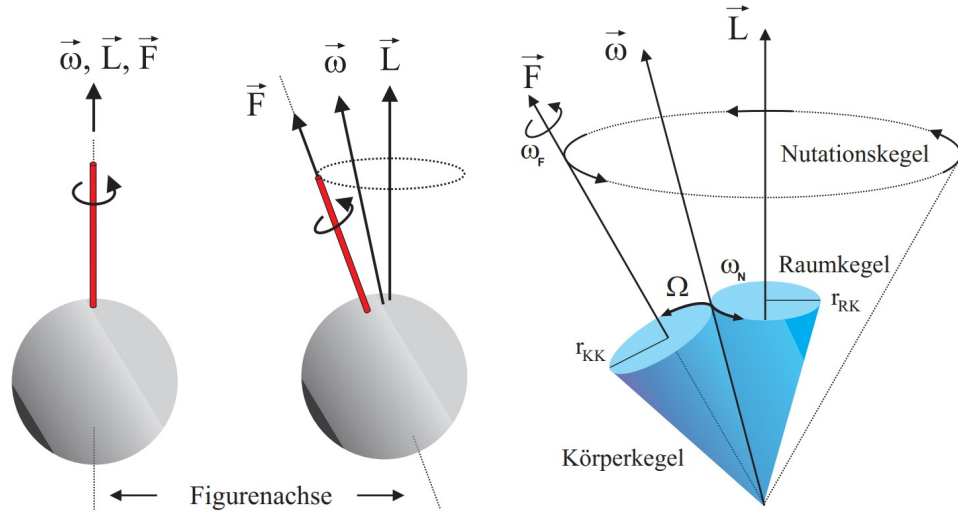


Abbildung 1: Die verschiedenen Bewegungsachsen des Kreisels¹

Es gilt außerdem, dass die Symmetrieachse und der Drehimpuls stets mit der momentanen Winkelgeschwindigkeit in einer Ebene liegen. Dadurch lässt letztere sich in Anteile der beiden ersteren zerlegen nach

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_N + \vec{\omega}_F \quad (1)$$

Werden nun Drehimpuls und momentane Winkelgeschwindigkeit in x- und z-Komponenten zerlegt, nutzt man mit Komponenten des Trägheitsmomentes \vec{I} dass

$$\omega_x = \omega_N \sin(\theta) \quad (2)$$

$$L_x = L \sin(\theta) \quad (3)$$

$$L_x = I_x \omega_x \quad (4)$$

Um zu für den Betrag der Nutationsfrequenz zu erhalten

$$\omega_N = \frac{L}{I_x} \quad (5)$$

Bei kleinen Winkeln, also niedriger Nutationsbewegung, gilt die Näherung

$$L \approx I_z \omega \approx I_z \omega_F \quad (6)$$

So erhält man mit (5)

$$\omega_N \approx \frac{I_z}{I_x} \omega_F \quad (7)$$

Die Nutationsbewegung lässt sich qualitativ gut durch den kegelförmigen Rotationskörper erkennen, den die Figurenachse durch sie beschreibt. Zur Beobachtung der momentanen Drehachse wird auf der Figurenachse eine Kreisscheibe mit verschiedenen Farbsektoren befestigt. Bei hohen Rotationsfrequenzen verschwimmen die Farben in der menschlichen Wahrnehmung. Nur nahe der Drehachse sind die Farben getrennt erkennbar. Durch die Bewegung der momentanen Drehachse auf dem Körperkegel um die Figurenachse ist am Ort der momentanen Drehachse ein langsamer Wechsel der Farben mit der Winkelgeschwindigkeit Ω in Abhängigkeit der Raumkegel- und Körperkegelradien r_{RK} und r_{KK} erkennbar:

$$\frac{\Omega}{\omega_N} = \frac{r_{RK}}{r_{KK}} \quad (8)$$

Nach längeren Rechnungen² erhält man als Ergebnis für die Farbwechselgeschwindigkeit:

$$\Omega = \frac{I_x - I_z}{I_x} \omega_N \quad (9)$$

²Siehe Wagner, Jens: „Physikalisches Praktikum PAP 2.2 für Studierende der Physik“, 2019, S. 28 f.

Wobei die Umformung gilt dass

$$I_x - I_z = \frac{I_z}{\frac{\omega_F}{\Omega} - 1} \quad (10)$$

Symmetrischer schwerer Kreisel

Der schwere Kreisel ist nicht mehr im Schwerpunkt fixiert, für den symmetrischen Fall (hier $I_x = I_y$) aber immer noch in der Figurenachse. Es wird für die praktische Durchführung dazu ein Stab mit einer Zusatzmasse m montiert, um den Schwerpunkt entlang der Figurenachse zu verschieben. Es wird nun der Fall ohne Nutationsbewegung, das heißt mit Zusammenfall der Richtungen von $\vec{\omega}$ und \vec{L} betrachtet. Dabei wirkt aufgrund der Gewichtskraft $m\vec{g}$ auf den Kreisel das Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{l} \times m\vec{g} \quad (11)$$

Mit \vec{l} als dem Vektor vom Unterstützungspunkt des Kreisels bis zur Zusatzmasse auf der Figurenachse.

Das Drehmoment induziert eine zeitliche Änderung des Drehimpulses, die aufgrund der Orthogonalität von Drehmoment und Drehimpuls in Richtung des Drehimpulses den Betrag des Drehimpulses konstant lässt. Es erfolgt also nur eine Richtungsänderung des Drehimpulses aufgrund der Gewichtskraft. Diese erfolgt um die z-Achse herum, die Bewegung wird als Präzession bezeichnet. Die Präzessionsfrequenz um die z-Achse ω_P ist aus der zeitlichen Änderung des Präzessionswinkels $\dot{\varphi}$ ableitbar:

$$\omega_P = \dot{\varphi} = \frac{dL}{L \sin(\alpha) dt} \quad (12)$$

Mit $L = I_z \omega_F$ folgt

$$\omega_P = \frac{mgl}{I_z \omega_F} \quad (13)$$

Beziehungsweise im allgemeinen Fall

$$\vec{M} = \vec{\omega}_P \times \vec{L} \quad (14)$$

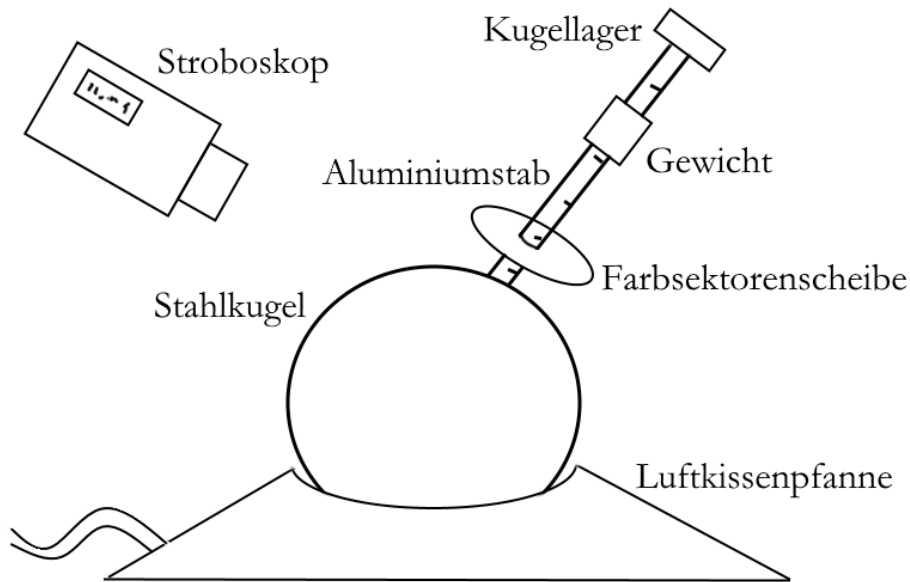
Woran man erkennt, dass die Präzessionsfrequenz nicht von der Orientierung des Kreisels, sondern nur vom Drehimpuls und Drehmoment abhängt.

Im komplizierteren Fall eines Kreisels mit Nutationsbewegung durchläuft die Spitze der Figurenachse eine zyklidähnliche Bahn, deren genaue Parameter von Verhältnis von Nutations- und Präzessionsfrequenz abhängt. Im Versuch erfolgt eine Beobachtung dieses Verhaltens nur qualitativ.

Versuchsanordnung und Durchführung

Das Video mit Durchführung und Messdaten wurde von <https://www.youtube.com/watch?v=Mj0BidvzYLc> am 02.04.2021 bezogen.

Versuchsskizze



Material

- Stahlkugel mit Aluminiumstab (Gesamtgewicht 4,164 kg, Kugelradius 5,08 cm) in Luftkissenpfanne gelagert
- Gewicht (Außenradius 0,725 cm, Innenradius 0,325 cm, Höhe 1,1 cm, Masse 9,85 g)
- Farbscheibe
- Scheibe mit konzentrischen Ringen
- Stroboskop
- Stoppuhr
- Motor mit Netzgerät
- Gyroskop

Anordnung

Als Kreisel wird eine Stahlkugel mit einem etwa 17 cm hervorstehenden, eingeschraubten Aluminiumstab verwendet. Die Kugel wird während des Versuches auf einem Luftkissen gelagert. Der herausstehende Stab legt Figuren- und z-Achse fest, und dient zur Anbringung von Gewichten. Er hat Rillen im Abstand von 1 cm, Doppelrillen bei 10 cm, 15 cm und 20 cm von der Kugelmitte. An seinem Ende befindet sich ein Kugellager zur Änderung der Kreisorientierung. Um einen kräftefreien Kreisel zu erhalten muss aufgrund der Massenverteilung der Kugel ein Gewicht am Stab befestigt werden.

Die Beschleunigung des Kreisels erfolgt für kleine Frequenzen durch Drehung des Stabes zwischen den Handflächen, für größere wird der Motor mit dem Filzrad am Kugelumfang angesetzt und gestartet, während die Kugel am Stabende gehalten wird.

Um den Kreisel zu Justieren wird die Farbscheibe am Stab nahe der Kugel befestigt, und der Kreisel auf eine Frequenz von 1 Hz bis 2 Hz beschleunigt. Die Figurenachse wird mit dem Kugellager so lange verschoben, und darauf die Scheibe entlang des Stabes verschoben, bis der Kreisel nicht mehr präzessiert. Ist damit der kräftefreie Zustand erreicht, werden entsprechend viele Unterlegscheiben zwischen Scheibe und Kreisel gelegt, um bei einem Scheibenwechsel die Justierung zu vereinfachen.

Zur Bestimmung der charakteristischen Kreisfrequenzen wird ein Stroboskop eingesetzt, welches Lichtimpulse von $10 \mu\text{s}$ aussendet. Wenn die n-fache Farbscheibendrehungsfrequenz und die Lichtimpulsfrequenz übereinstimmen, scheinen die Farbsektoren daher im Stroboskoplicht stillzustehen. Um sicherzustellen, dass die 1-fache Farbscheibendrehungsfrequenz beobachtet wird, wird bei einem scheinbaren Stillstand die Stroboskopfrequenz um ganzzahlige Vielfache variiert - Wenn die letztere Frequenz zu hoch wird, sind mehrere gleich farbige Sektoren zu beobachten.

Der Messbereich I des Stroboskops ist für die maximal mögliche Anregungsfrequenz des Motors von 800 rpm ausreichend. Das leichte Vermischen der Farben lässt sich durch nicht stroboskopartiges Raumlicht erklären.

Vorversuch

Das Druckluftventil wird geöffnet, die Scheibe mit Farbsektoren auf den Stab gebracht, und die Justierung vorgenommen. Der Kreisel wird auf wenige Umdrehungen pro Sekunde beschleunigt, und die Reaktion des Kreisels bei kleinen Krafeinwirkungen auf das Kugellager am Stangenende beobachtet.

Anmerkung: Die folgenden Versuchsteile des Vorversuchs wurden im genutzten Video nicht vorgeführt.

Nun wird eine Nutationsbewegung durch einen seitlichen Stoß des Stabes erzeugt. Es wird die Farbscheibe beobachtet, um einen Punkt ohne Farbvermischung auszumachen, dessen Farbe sich periodisch ändert. Das Vorgehen wird nach aufsetzen der Scheibe mit den Farbringen wiederholt. Am Ort der momentanen Drehachse verändert sich die Farbe bei Erreichen eines Nutationskegels durch einen Farbring nicht mehr.

Es wird nun die Scheibe mit den zur Aufnahmeachse verschobenen konzentrischen Kreisen auf die Farbscheibe aufgelegt. Besteht keine Nutationsbewegung, sind verwaschene, konzentrische Kreise um den Stab erkennbar, der Mittelpunkt zeigt hierbei die Drehachse an. Nun wird das Vorgehen mit den um den Stab zentrierten konzentrischen Kreisen wiederholt. Der Mittelpunkt der verwaschenen Kreise markiert jetzt die stationäre Drehimpulsachse. Es wird nun ein weiteres Gewicht am Stabende angebracht und der Versuch wiederholt, dabei sollte eine Präzessionsbewegung erkennbar werden.

Dämpfung des Kreisels

Es wird die Sektorenscheibe angebracht, und auf Kräftefreiheit justiert. Nun werden die zwei Gewichte am Stabende fixiert. Der Kreisel wird auf 500 rpm bis 600 rpm beschleunigt, und über 12 min alle 2 min die Drehfrequenz gemessen.

Präzession

In diesem Versuchsteil wird der Kreisel stets erst senkrecht stehend beschleunigt, und dann durch Angriff am Kugellager bis zur gewählten Ablesemarke am Messingstabin der Kreiselbasis am Kugellager schräg gestellt.

Es wird nun die Farbscheibe aufgesetzt und auf Kräftefreiheit justiert. Im Abstand von 20 cm zur Kugelmitte wird ein Gewicht befestigt. Der Kreisel wird auf ungefähr 500 rpm beschleunigt. Der Stab wird bei gleicher Kreiselfrequenz möglichst ohne Nutation unter drei Winkeln des Stabs gegen die Vertikale losgelassen, und die Präzessionsdauer, also die Umlaufzeit mit der Stoppuhr bestimmt.

Der Kreisel wird nun mit verschiedenen Massenkfigurationen beschwert:

- Ein Gewicht bei 15 cm
- Ein Gewicht bei 20 cm
- Zwei Gewichte bei 15 cm
- Zwei Gewichte bei 20 cm

Es wird für jede Gewichtseinstellung bei vier verschiedenen Frequenzen von 300 rpm bis 600 rpm mit der Stoppuhr die Präzessionsdauer bestimmt.

Umlauf momentane Drehachse um Figurenachse

Es wird wieder auf Kräftefreiheit justiert. Nun wird der Kreisel nach Beschleunigung mithilfe des Motors in senkrechter Richtung wieder mit einem Kratstoß in Nutation versetzt.

Es wird durch Anlegen der Farbscheibe, unter Beachtung der Farbreihenfolge, die Umlaufzeit bestimmt.

Es wird für zehn Frequenzen zwischen 300 rpm und 600 rpm die Umlaufzeit der momentanen Drehachse um die Figurenachse gemessen, dazu wird die Zeit für zehn Perioden des Farbwechsels der Sektorscheibe notiert.

Nutation

Es wird der Kreisel wie zuvor justiert und beschleunigt. Dann wird er so in Nutation versetzt, dass die Öffnung des Nutationskegels an der Stabspitze 1 cm bis maximal 2 cm beträgt. Es werden nun zehn Wertepaare von ω_N und ω_F aufgenommen - Dabei wird mit der Stroboskopfrequenz „vorgehalten“, um den Fehler durch den Zeitunterschied der beiden Messungen zu minimieren.

Messprotokoll

Alle hier geschilderten Messungen wurden dem Video unter <https://www.youtube.com/watch?v=Mj0BIdvzYLc> am 05.04.2021 entnommen.

Vorversuch

Der im genutzten Video durchgeführte Teil des Vorversuches liefert keine weiteren Beobachtungen.

Dämpfung des Kreisels

Der Fehler der Messung wird geschätzt auf 5 rpm, für die Zeiten auf 0,5 s. So erhält man die Tabelle:

Tabelle 1: Der sinkende Verlauf der Frequenz über die Zeit

Zeit[m]	Drehfrequenz[rpm]
0	470
2	425
4	390
6	360
8	330
10	305
12	285

Präzession

Es ergeben sich bei der Frequenz von (500 ± 10) rpm die Umlaufzeiten T_P :

Tabelle 2: Umlaufdauern bei verschiedenen Neigungswinkeln der Achse

Winkel [°]	T_P [s]
≈ 30	75,50
≈ 60	77,02
≈ 90	76,24

Bei der Messung mit verschiedenen Massenkombinationen bei verschiedenen Abständen l ergeben sich für die Frequenzen ω_F die Präzessionsdauern T_P als:

Tabelle 3: Die Umlaufdauern und Frequenzen bei verschiedenen Massenkonfigurationen

Anzahl Gewichte	l [cm]	ω_F [rpm]	T_P [s]
1	15	300	60
1	15	400	78
1	15	500	98
1	15	600	114
1	20	300	43
1	20	400	57
1	20	500	71
1	20	600	85
2	15	300	29
2	15	400	38
2	15	500	47
2	15	600	57
2	20	300	23
2	20	400	29
2	20	500	36
2	20	600	44

Umlauf momentane Drehachse um Figurenachse

Der erste Aufgabenteil zur Bestimmung der Rotationsrichtung wurde im Video nicht in dieser Form vorgeführt.

Das Ergebnis des zweiten Teils für zehn Frequenzen zwischen 300 rpm und 600 rpm und ihre Umlaufzeiten, in diesem Fall als Zeit für zehn Farbwechselperioden, wird hier aufgeführt:

Tabelle 4: 10 Umlaufzeiten bei verschiedenen Frequenzen

ω_F [rpm]	10 Farbwechselperioden [s]
300	32,4
340	29,1
360	27,3
380	25,4
400	24,6
440	22,3
480	20,3
520	18,7
560	17,3
600	16,0

Nutation

Für die Wertepaare der Frequenzen ergibt sich

Tabelle 5: Die Wertepaare der Frequenzen bei leichter Nutation

ω_F [rpm]	ω_N [rpm]
620	580
600	560
630	500
480	450
420	390
400	370
380	350
370	340
340	310
290	270

Der Fehler wird hier für beide Messungen auf 10 rpm geschätzt.

Auswertung

Alle verwendeten Scripte sind der Ausarbeitung beigefügt.

Dämpfung des Kreisels

Es lässt sich aus Tabelle aufgrund der allgemeinen Dämpfungsbeziehung für die Rotationsfrequenz $\omega(t)$ mit der Anfangsfrequenz ω_0

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-\delta t} \quad (15)$$

die Dämpfungskonstante δ bestimmen, diese entspricht der Steigung im halblogarithmischen Diagramm. Es werden daher die Messwerte in ein solches Diagramm eingetragen, und eine Ausgleichsgerade gezogen:

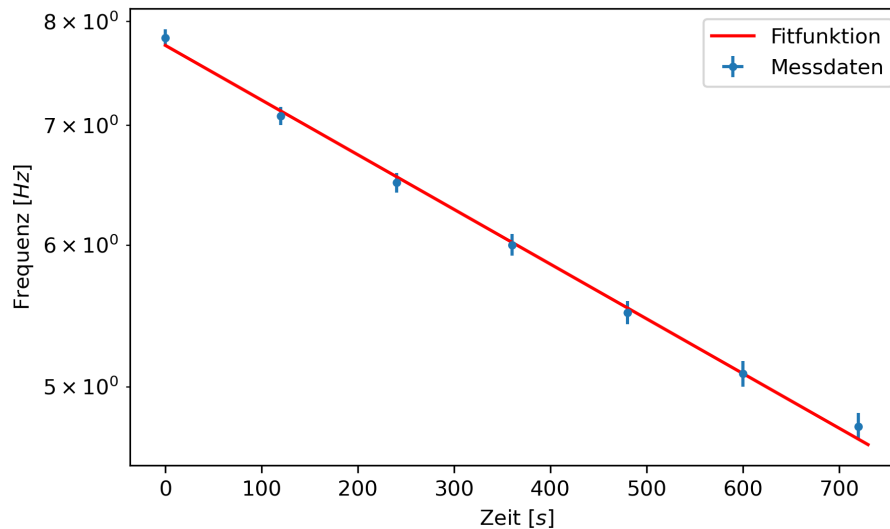


Abbildung 2: Die Werte der Dämpfungsmessung, halblogarithmisch mit Ausgleichsgerade

Der Betrag ihrer Steigung, und damit die Dämpfungskonstante, ergibt sich mit Standardfehler zu $\delta = (7,03 \pm 0,16) \cdot 10^{-4} \frac{1}{s}$.

Aus diesem Wert lässt sich die Halbwertszeit $T_{\frac{1}{2}}$ der Rotationsfrequenz gewinnen, man nutzt dazu die aus Gleichung

(15) herleitbare Beziehung

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(2)}{\delta} \quad (16)$$

bei der sich der Relativfehler der Dämpfungskonstante erhält. So folgt der Wert für die Halbwertszeit $T_{\frac{1}{2}} = (986 \pm 23) \text{ s}$.

Präzession

Bei Betrachtung von Tabelle wird ersichtlich, dass die Präzessionsdauer nicht etwa mit dem Winkel zu- oder abnimmt: Die Standardabweichung der Werte beträgt 0,6206 s, was vom Mittelwert von 76,2533 s nur eine Abweichung von etwa 0,814 % darstellt.

Nun soll das Trägheitsmoment des Kreisel entlang der z-Achse nach (13) aus den Werten in Tabelle berechnet werden über

$$I_z = \frac{mgl}{\omega_P \omega_F} \quad (17)$$

Bekannt sind die jeweilige Zusatzmasse m , der jeweilige Abstand l dieser, und der Ortsfaktor $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Die Präzessionsfrequenz ω_P lässt sich aus den in der Tabelle vermerkten Werten für die Zeit t durch $\omega_P = \frac{2\pi}{t}$ gewinnen. Auch sind die eingestellten Drehfrequenzen ω_F vermerkt, doch werden diese über die gemessene Zeit einer Präzessionsperiode nach Gleichung (15) von ihrem Anfangswert ω_F auf einen bestimmten Endwert ω_{Ff} abfallen. Aufgrund dessen wird mithilfe der oben bestimmten Dämpfungskonstante der Kreisbewegung nun der Frequenzwert nach einer Präzessionsperiode bestimmt, und dann ein Mittelwert $\overline{\omega_F}$ gebildet, welcher in Gleichung (??) genutzt wird. Es ergibt sich die Tabelle:

Tabelle 6: Mittlere Drehkreisfrequenzen mit Rücksichtnahme auf die Dämpfung

Anzahl Gewichte	Entfernung [cm]	Drehfrequenz [rpm]	ω_F [Hz]	ω_{Ff} [Hz]	$\overline{\omega_F}$ [Hz]
1	15	300	31,42	30,12	30,77
1	15	400	41,89	39,65	40,77
1	15	500	52,36	48,87	50,62
1	15	600	62,83	57,99	60,41
1	20	300	31,42	30,48	30,95
1	20	400	41,89	40,24	41,07
1	20	500	52,36	49,81	51,09
1	20	600	62,83	59,19	61,01
2	15	300	31,42	30,78	31,10
2	15	400	41,89	40,78	41,34
2	15	500	52,36	50,66	51,51
2	15	600	62,83	60,36	61,60
2	20	300	31,42	30,91	31,16
2	20	400	41,89	41,04	41,47
2	20	500	52,36	51,05	51,71
2	20	600	62,83	60,92	61,87

Trägt man nun die Präzessionsdauern T_P gegen die mittleren Drehkreisfrequenzen $\overline{\omega_F}$ für die verschiedenen Massenkonfigurationen auf, die Ungenauigkeit der Präzessionsdauerermessung wird hierbei auf $\pm 0,5 \text{ s}$ geschätzt, erhält man

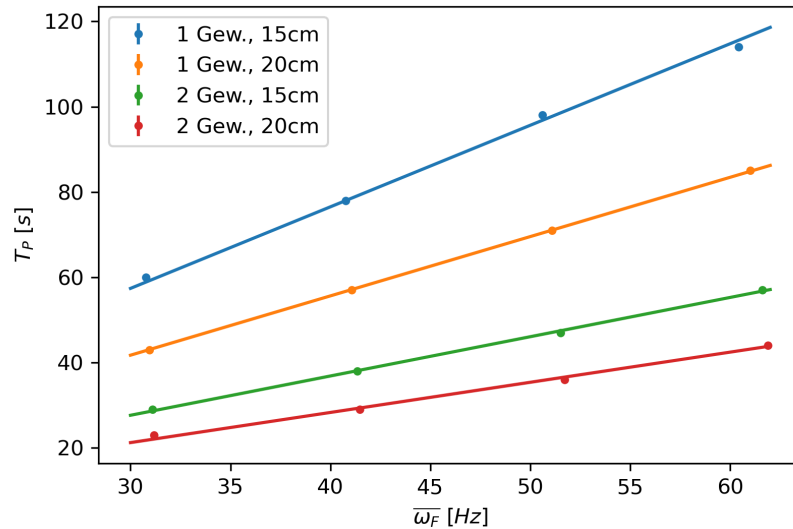


Abbildung 3: Präzessionsdauern gegen Steigungen bei verschiedenen Trägheitsmomenten

Die Steigungen der Ausgleichsgeraden ergeben sich bei einer Masse zu $(1,913 \pm 0,014) \text{ s}^2$ für den Abstand von 15 cm und $(1,3908 \pm 0,0013) \text{ s}^2$ für den Abstand von 20 cm, bei zwei Massestücken zu $(0,9212 \pm 0,0039) \text{ s}^2$ für 15 cm Abstand, und $(0,7074 \pm 0,0071) \text{ s}^2$ für 20 cm.

Der Wert der Steigung $s = \frac{T_P}{\omega_F} = \frac{2\pi}{\omega_P \omega_F}$ findet sich wieder in Gleichung (17). Mit ihm lässt sich die Gleichung umschreiben zu

$$I_z = \frac{mgl}{\omega_P \omega_F} = mgl \frac{s}{2\pi} \quad (18)$$

Wobei der Fehler der Steigung einfach skaliert. So erhält man die Ergebnisse der Trägheitsmomente für die Konfigurationen in obiger Reihenfolge: $(4,413 \pm 0,033) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$, $(4,2780 \pm 0,0038) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$, $(4,250 \pm 0,018) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$ und $(4,352 \pm 0,044) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$. Dies führt im Mittelwert als Endergebnis, mit einem Fehler nach Gauß, auf

$$I_z = (4,323 \pm 0,015) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2.$$

Umlauf momentane Drehachse um Figurenachse

Im zur Verfügung stehenden Video ist eine Verfolgung des Kreisels, in dem Maße, wie es zum ausreichenden Vergleich mit Abbildung 3 im Script³ nötig wäre, aufgrund der Kameraeinstellung nicht richtig möglich, weshalb dieser Vergleich hier ausgelassen wird. Qualitativ sind aber die in der Einleitung beschriebenen visuellen Effekt an der Kreisscheibe beobachtbar. Es lässt sich aus Tabelle allerdings durchaus die Beobachtung anstellen, dass Ω kleiner ist als ω_F . Es folgt aus (10):

$$I_x - I_z = \frac{I_z}{\frac{\omega_F}{\Omega} - 1} > 0 \implies I_x > I_z \quad (19)$$

I_x ist also stets größer als I_z .

Es wird nun aus Tabelle die Umlauffrequenz der momentanen Drehachse gegen ω_F aufgetragen, erstere ergibt sich dabei durch $\Omega = \frac{10 \cdot 2\pi}{T_K}$ wobei T_K die in der Tabelle gegebene Zeit für zehn Farbwechselperioden ist. Der Messfehler der Zeit wird wieder auf 0,5 s geschätzt. Man erhält das Diagramm:

³Wagner, Jens: „Physikalisches Praktikum PAP 2.1 für Studierende der Physik“, 2019, S. 24

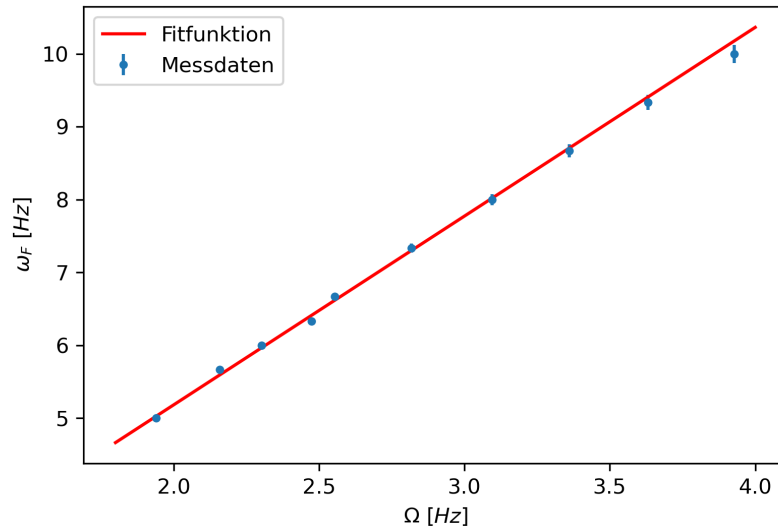


Abbildung 4: Die Farbwechselkreisfrequenz über die Drehkreisfrequenz

Es ergibt sich als Steigung m des Graphen bei Anlegung einer Ursprungsgeraden der Wert $m = (1,6280 \pm 0,0048) \cdot 10^1$. Durch einsetzen dieser Steigung und dem zuvor ermittelten Wert für I_z in (10) lässt sich I_x bestimmen:

$$I_x = \frac{I_z}{m-1} + I_z \quad (20)$$

Man erhält nach der Fehlerrechnung

$$\Delta I_x = \sqrt{\left(\frac{\partial I_x}{\partial I_z} \Delta I_z\right)^2 + \left(\frac{\partial I_x}{\partial m} \Delta m\right)^2} \quad (21)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{m}{m-1} \Delta I_z\right)^2 + \left(\frac{I_z}{(m-1)^2} \Delta m\right)^2} \quad (22)$$

$$= I_x \sqrt{\left(\frac{\Delta I_z}{I_z}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m(m-1)}\right)^2} \quad (23)$$

Den Wert $I_x = (4,606 \pm 0,016) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$.

Nutation

Auch aus den Daten zur Nutation kann das Trägheitsmoment I_x bestimmt werden. Es wird dazu aus Tabelle ω_N über ω_F aufgetragen:

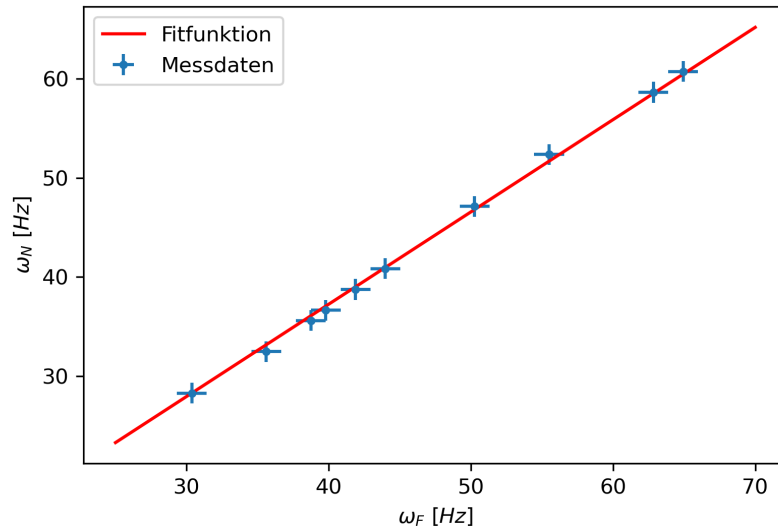


Abbildung 5: ω_N über ω_F aus der Nutationsmessung gegeneinander aufgetragen

Woraus sich nun mit Gleichung (7) zu

$$I_x \approx \frac{I_z}{m} \quad (24)$$

Über die Steigung m mit Standardfehler von $(9,314 \pm 0,028) \cdot 10^{-1}$ nach quadratischer Addition der Relativfehler näherungsweise ergibt: $I_x = (4,641 \pm 0,022) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$.

Diskussion

Diskussion

Vorversuch

Der Kreisel stellt sich ohne zusätzliche Gewichte mit dem Stab nach oben auf, dies ist auf seine Massenverteilung zurückzuführen, der Massenschwerpunkt liegt unter dem Symmetriezentrum. Bringt man die Farbscheibe auf, verschiebt diese den Schwerpunkt weiter nach oben, und alle Kräfte greifen nur noch symmetrisch an, sodass keine Drehmomente mehr induziert werden.

Alle weiteren Teile des Vorversuchs wurden im Video nicht vorgeführt.

Dämpfung des Kreisels

Die Plausibilität des Wertes für die Dämpfungskonstante lässt sich leicht mit dem erhaltenen Wert für die Halbwertszeit überprüfen: Betrachtet man Tabelle , so wird ersichtlich, dass die Frequenz nach 720 s noch nicht ganz auf die Hälfte abgefallen ist, ruft man sich jetzt den Verlauf einer exponentiellen Zerfallskurve in den Sinn, scheint der Wert der errechneten Halbwertszeit grob abgeschätzt sinnvoll.

Auffällig ist, dass die Erstellung der Fitgeraden sehr sensitiv gegenüber einem Frequenzachsenabschnitt ist. Dieser wurde für den errechneten Wert nicht zugelassen, wird dies jedoch getan, so verdoppelt sich der Wert der Dämpfungskonstanten fast, auf $(1,15 \pm 0,91) \cdot 10^{-3} \frac{1}{s}$. Dieser Wert führt auf unplausibel kleine Halbwertszeiten. Eine so starke Sensitivität des Fits auf einen Achsenabschnitt ist verwunderlich, und deutet eventuell auf einen systematischen Fehler hin, etwa auf einen Offset der Drehfrequenz.

Zudem hätte der Fit noch durch die Anwendung eines anderen Fitalgorithmus verbessert werden können: Der verwendete Least-Square-Algorithmus berücksichtigt nur Fehler auf der Ordinate, allerdings waren auch die Werte auf

der Abszisse fehlerbehaftet, aufgrund der menschlichen Ungenauigkeit an der Stoppuhr. Hier wäre die Verwendung eines Orthogonal-Distance-Regressionsalgorithmus sinnvoll.

Präzession

Die Ergebnisse für die Präzessionsdauern stimmen sehr gut überein, unabhängig vom eingestellten Winkel der Achse. Dies ist nach Gleichung (13) zu erwarten, da die Präzessionsfrequenz winkelunabhängig berechenbar ist.

Die errechneten Trägheitsmoment scheint durch die verschiedenen Ergebnisse hinweg konsistent zu sein. Die Standardabweichung der einzelnen Werte beträgt $0,0638 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$, das sind etwa 1,48% des Mittelwertes. Um eine grobe Abschätzung zu erhalten, berechnet man den erwarteten Wert für eine homogene Kugel mit der Masse $m = 4,164 \text{ kg}$ und dem Radius $r = 0,0508 \text{ m}$ nach

$$I = \frac{2}{5}mr^2 \quad (25)$$

zum Wert von $4,2983 \text{ kg m}^2$. Die Sigmaabweichung des experimentellen Wertes von diesem Wert beträgt etwa 1,647. Dies ist noch im nichtsignifikanten Bereich, wobei sogar eine gewisse Abweichung zu erwarten ist, aufgrund der Zusatzmassen und der inhomogenen Massenverteilung der Kugel.

Ungenauigkeiten könnten des Weiteren durch die Rundung der Präzessionsdauern auf ganze Sekunden entstanden sein, vor allem aber ist die Fitmethode zur Bestimmung der Steigung im Diagramm problematisch: Hier wurde wieder der Least-Squares-Algorithmus verwendet, obwohl dieser Fehler in der Frequenzrichtung nicht beachten konnte. Es hätte stattdessen auch hier ein ODR-Algorithmus angewendet werden können.

Umlauf momentane Drehachse um Figurenachse

Der Vergleich der erhaltenen Werte in Tabelle mit der Erwartung aus Gleichung (10) bestätigt in der Tat, dass das Trägheitsmoment I_x größer ist als I_z . Neben dieser qualitativen Aussage wurde I_x explizit bestimmt. Ein Vergleich dieses Wertes mit dem aus der Nutation bestimmten Wert ist sinnvoll.

Nutation

Wird der durch die Nutationsmethode bestimmte Wert von $I_x = (4,641 \pm 0,022) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$ mit dem Wert aus der vorherigen Methode von $(4,606 \pm 0,016) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$ verglichen, stellt man eine Sigmaabweichung von circa 1,29 fest, die Werte sind also noch recht gut kompatibel.

Um die Genauigkeit hier zu erhöhen, wäre für auch hier die Bestimmung der Steigung im Nutationsfrequenzdiagramm die Anwendung des ODR-Algorithmus sinnvoll.

Abschließendes Fazit

Insgesamt ist es durch Beobachtungen des Rotationsverhaltens des Kreisels gut gelungen, diverse Parameter des Systems, wie die Dämpfungskonstante, die Halbwertszeit der Rotation, oder verschiedene Trägheitsmomente zu bestimmen. Die Ergebnisse entsprechen den Erwartungen, das Vorgehen ließe sich stellenweise durch Anwendung geeigneterer Algorithmen, oder natürlich Verlängerung der Messreihen, beziehungsweise häufigere Wiederholung, verbessern.