# Ausarbeitung Versuch 221 Adiabatenkoeffizient

Lucas Eekhof

## Motivation

Der Adiabatenkoeffizient ist eine zentrale Größe zur Beschreibung des Verhaltens realer Gase unter Änderungen zum Beispiel des Druckes oder der Temperatur. Es existieren verschiedene Möglichkeiten zur Bestimmung dieses Wertes, in diesem Versuch werden die Methoden nach Clément-Desormes und Rüchardt genutzt und miteinander verglichen.

## Physikalischer Hintergrund

### Messung nach Clément-Desormes

Der Messaufbau für den Adiabatenkoeffizienten nach Clément-Desormes ergibt sich nach folgender Skizze:

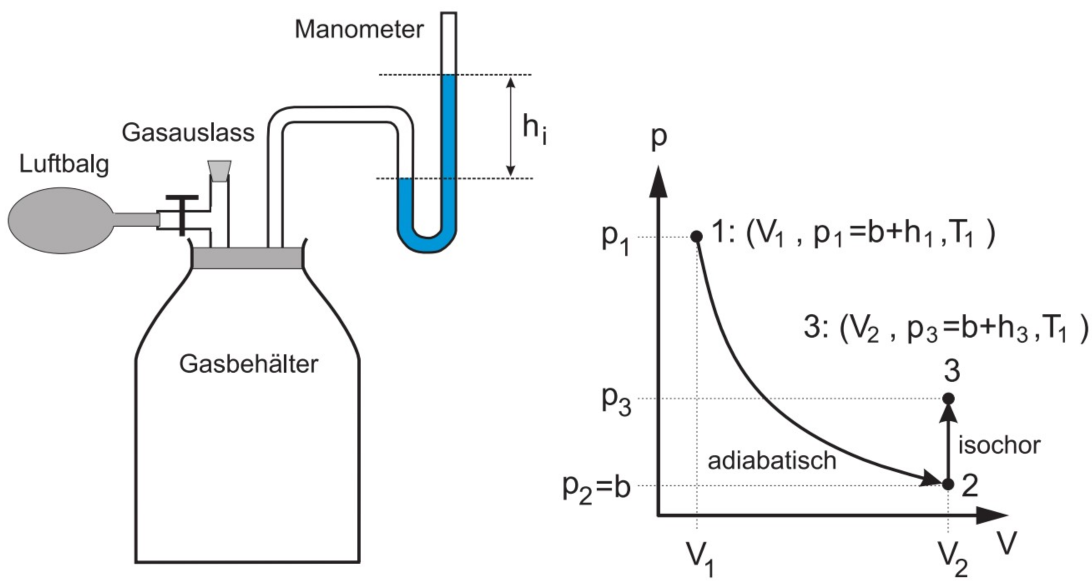


Abbildung 1: Skizze des Messaufbaus nach Clément-Desormes mit Graph des Adiabatenverlaufs[1]

Mit anbeigestelltem Graphen des Verlaufs der Adiabaten im pV-Diagramm.

In der Skizze ersichtlich kann im Aufbau mit einem Luftbalg und einem Auslass der Druck in einem Gasbehälter variiert werden, er wird dabei von einem ebenso am Behälter befestigten Manometer abgelesen.

Durch die Erzeugung eines Überdruckes im Gasbehälter ist eine Erwärmung des Gases zu erwarten. Wartet man nun den Temperaturausgleich mit der Umgebung ab, wird der in 1 erkenntliche Zustand 1 im pV-Diagramm erreicht, das System hat dann die Parameter:

$$\textbf{Zustand 1: } V_1; \quad p_1 = b + h_1; T_1 \tag{1}$$

[1] Wagner, Jens: „Physikalisches Praktikum PAP 2.1 für Studierende der Physik“, 2019, S. 32

Mit dem Volumen $V_1$, dem äußeren Luftdruck $b$, und der Höhendifferenz des Manometers $h_1$, sowie der Temperatur des Gases $T_1$.

Nun kann kurzzeitig der Auslass geöffnet werden, sodass sich der Druck an den äußeren Luftdruck angleicht. Es entweicht Gas - Anders herum ist durch das Hinzufügen von Gas auch eine Druckzunahme auf $p_1$ zu erwarten. Wegen der kurzen Dauer des Druckausgleiches findet kein Wärmeaustausch mit der Umgebung statt: Der Prozess ist also Adiabatisch, mit einer Abkühlung um die Temperaturdifferenz $\Delta T$. Für den zweiten Zustand gilt so:

$$\textbf{Zustand 2: } V_2 = V_1 + \Delta_V; \quad p_2 = b; T_2 = T_1 - \Delta T \tag{2}$$

Mit analogen Benennungen.

Nun wird abgewartet, bis das Gas wieder die Umgebungstemperatur erreicht. Da dabei keine Volumenänderung stattfindet, ist die Zustandsänderung isochor, mit einem Anstieg des Druckes. Bei Erreichen des thermischen Gleichgewichtes befindet sich das System im dritten Zustand:

$$\textbf{Zustand 3: } V_3 = V_2 = V_1 + \Delta_V; \quad p_3 = b + h_3; T_3 = T_1 \tag{3}$$

Nun gilt nach der Poissonschen Gleichung mit dem Adiabatenkoeffizienten $\kappa$ die Beziehung zwischen dem ersten und dem zweiten Zustand:

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa \tag{4}$$

Womit sich ergibt:

$$(b + h_1) V_1^\kappa = b(V_1 + \Delta V)^\kappa \tag{5}$$

Nutzt man nun dass $\Delta V \ll V_1$ ergibt sich für $(V_1 + \Delta V)^\kappa$ die Gleichung

$$(V_1 + \Delta V)^\kappa = V_1^\kappa \left(1 + \frac{\Delta V}{V_1}\right)^\kappa \approx V_1^\kappa \left(1 + \kappa \frac{\Delta V}{V_1}\right) \tag{6}$$

Setzt man nun in Gleichung (5) ein, ergibt sich

$$\frac{h_1}{b} = \kappa \frac{\Delta V}{V_1} \tag{7}$$

Nun ist im ersten und im dritten Zustand die Temperatur gleich, weshalb das Gesetz von Boyle-Mariotte, $pV =$ const., anwendbar ist:

$$p_1 V_1 = p_3 V_3 \Longrightarrow (b + h_1) V_1 = (b + h_3)(V_1 + \Delta V) \tag{8}$$

Es ist dabei der Term $h_3 \Delta V$ vernachlässigbar, da $h_3 \ll b$ und $\Delta V \ll V_1$, also ergibt sich

$$h_1 V_1 = h_3 V_1 + b \Delta V \tag{9}$$

Und daraus

$$\frac{\Delta V}{V_1} = \frac{h_1 - h_3}{b} \tag{10}$$

Was sich in (7) einsetzen lässt um zu erhalten dass:

$$\boxed{\kappa = \frac{h_1}{h_1 - h_3}} \tag{11}$$

Wodurch sich der Adiabatenkoeffizient also rein durch Ablesung des Manometerpegels im ersten und im dritten Zustand bestimmen lässt.

## Messung nach Rüchardt

Der Messaufbau für den Adiabatenkoeffizienten nach Rüchardt ergibt sich nach folgender Skizze:

[2] Wagner, Jens: „Physikalisches Praktikum PAP 2.1 für Studierende der Physik“, 2019, S. 33

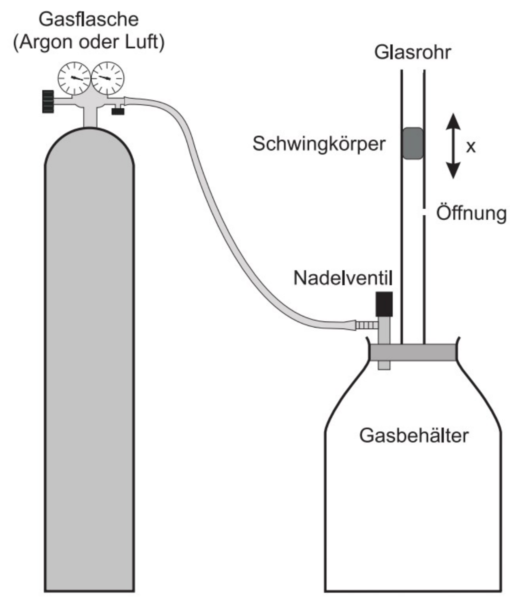


Abbildung 2: Skizze des Messaufbaus nach Rüchardt[2]

Hier wird also eine Glasröhre an einen Gasbehälter montiert, in die ein Schwingkörper eingebracht wird. Bei einer Schwingung findet eine adiabatische Kompression und Expansion periodisch statt, die Dämpfung ist jedoch stark, weshalb wenige Perioden sichtbar sind. Um die Oszillation weiter anzuregen, befindet sich auf mittlerer Höhe des Glasrohres eine Öffnung von 1 mm Durchmesser. Wird, zum Beispiel aus einer Druckluftflasche, ein konstanter Gasstrom dem Gasbehälter zugeführt, wirkt ein Zusatzdruck auf den Schwingkörper. Befindet dieser sich oberhalb der Öffnung, kann der Druck durch Gasentweichung sinken, andernfalls steigt er an. Diese Methode kompensiert die Reibungsverluste, die Oszillation ist aber weiterhin durch die adiabatische Expansion und Kompression des Gases getrieben.

Es herrscht ein Gleichgewicht zwischen Flaschendruck $p$ und Luftdruck, wenn mit dem Schweredruck des Sxchwingkörpers $\frac{mg}{A}$ gilt:

$$p = p_0 + \frac{mg}{A} \tag{12}$$

Dabei sind $m$ die Masse, und $A$ die Querschnittsfläche des Schwingkörpers. Schwingt der Körper um eine kleine Strecke $x$ aus der Gleichgewichtslage, so ändert sich der Druck $p$ um $dp$, und es gilt nach Newton:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = Adp \tag{13}$$

Es gilt wieder die Poissonsche Gleichung

$$pV^\kappa = \text{const.} \Longleftrightarrow p = V^{-\kappa} \cdot \text{const.} \tag{14}$$

Woraus man bei Differentiation nach $V$ erhält:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} = -\kappa V^{-\kappa-1} \cdot \text{const.} \tag{15}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} = -\kappa\frac{p}{V} \tag{16}$$

$$dp = -\kappa\frac{p}{V}dV \tag{17}$$

Woraus man durch Einsetzen in (13) erhält

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -A\kappa\frac{p}{V}dV \tag{18}$$

Nutzt man nun $dV = Ax = \pi r^2 x$ mit dem Glasrohrradius $r$, ergibt sich

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\pi^2 r^4 \kappa \frac{p}{V} x \iff \ddot{x} + \frac{\pi^2 r^4 \kappa p}{mV} x = 0 \tag{19}$$

Also die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators, in allgemeiner Form

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{20}$$

Was durch Vergleich mit (19) für die Kreisfrequenz $\omega$, beziehungsweise die Periodendauer $T$ liefert

$$\omega = \pi r^2 \sqrt{\frac{\kappa p}{mV}} \iff T = \frac{2}{r^2}\sqrt{\frac{mV}{\kappa p}} \tag{21}$$

Womit man für den Adiabatenkoeffizienten erhält

$$\boxed{\kappa = \frac{4mV}{r^4 T^2 p}} \tag{22}$$

Dabei sind die Versuchsparameter $m$, $V$ und $r$ bekannt, $p$ erhält man aus (12), daher verbleibt zur Bestimmung des Adiabatenkoeffizienten nur die Messung der Periodendauer $T$.

# Versuchsanordnung und Durchführung

## Material

- Glasbehälter mit Manometeraufbau und Luftbalg nach Clément-Desormes
- Glasbehälter mit Rohransatz und Nadelventil nach Rüchardt
- Glasrohr mit zylindrischem Schwingkörper
- Gasflaschen (Argon, Luft)
- Stoppuhr

## Durchführung

### Messung nach Clément-Desormes

Es wird am beschriebenen Aufbau durch Pumpen am Luftbalg ein Überdruck im Gasbehälter erzeugt, und einige Minuten bis zum Temperaturausgleich gewartet. Es wird die Manometeranzeige notiert.

Es wird nun für etwa 2 s der Auslass geöffnet, und wieder der Temperaturausgleich abgewartet. Daraufhin wird wieder die Manometeranzeige notiert.

Das Vorgehen wird noch fünf mal wiederholt.

### Messung nach Rüchardt

Es wird am beschriebenen Aufbau an der Gasflasche ein Auslassdruck von ungefähr 0,4 bar eingstellt, und das Nadelventil so geregelt, dass der Schwingkörper um die Glasrohrmitte oszilliert, und vor Messbeginn ein paar Minuten bis zur vollständigen Füllung der Apparatur mit dem genutzten Gas abgewartet.

Die Messparameter $m$, $V$ und $r$ werden notiert. Zudem wird der Luftdruck verzeichnet.

Die Zeit für etwa 50 Oszillationen des Schwingkörpers wird abgemessen. Die Messung wird jeweils einmal mit Luft, und einmal mit Argongas durchgeführt.

# Messprotokoll

Alle hier aufgeführten Messungen wurden dem Video unter `https://www.youtube.com/watch?v=JYfoBXvQ7KQ` am 06.04.2021 entnommen.

## Messung nach Clément-Desormes

Nach dem beschriebenen Prozedere erhält man in den fünf Messungen für die Drücke, beziehungsweise Säulenhöhen $h_1$ und $h_3$ die Werte:

Tabelle 1: Die Drücke der Messung nach Clément-Desormes

| $h_1$ $[cm]$ | $h_3$ $[cm]$ |
|---|---|
| 6,8 | 1,4 |
| 6,0 | 1,2 |
| 7,8 | 1,6 |
| 8,3 | 1,6 |

Dabei wird der Fehler einer Saulenhöhenmessung auf einen Skalenteil, also 1 mm geschätzt, durch die Differenzmessung also insgesamt etwa 1,5 mm nach Multiplikation mit $\sqrt{2}$.

etwas zu klein

## Messung nach Rüchardt

Man erhält bei der Messung für Luft einer Schwingkörpermasse von $m = (0{,}026\,116 \pm 0{,}000\,002)\,\mathrm{kg}$, einem Volumen von $V = (0{,}005\,370 \pm 0{,}000\,005)\,\mathrm{m}^3$ und einem Schwingkörperdurchmesser von $2r = (0{,}015\,95 \pm 0{,}000\,02)\,\mathrm{m}$ für 50 Oszillationen des Schwingkörpers eine Zeit mit geschätztem Fehler von $(49{,}6 \pm 0{,}5)\,\mathrm{s}$.

Für das Argongas erhält man bei $m = (0{,}026\,006 \pm 0{,}000\,002)\,\mathrm{kg}$, $V = (0{,}005\,460 \pm 0{,}000\,005)\,\mathrm{m}^3$, $2r = (0{,}015\,97 \pm 0{,}000\,05)\,\mathrm{m}$ $(48{,}9 \pm 0{,}5)\,\mathrm{s}$ nach gleichem Vorgehen.

Der Luftdruck ist in beiden Fällen $(1000{,}6 \pm 0{,}1)\,\mathrm{bar}$, der Ortsfaktor wird zu $(9{,}81 \pm 0{,}01)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ angenommen.

# Auswertung

Die zur Auswertung genutzten Scripte sind der Ausarbeitung beigefügt.

## Berechnung nach Clément-Desormes

Es werden nun nach Gleichung (11) aus den Wertepaaren in Tabelle 1 jeweils die entsprechenden Adiabatenkoeffizienten $\kappa$ berechnet. Der Fehler berechnet sich dabei nach

$$\Delta\kappa = \sqrt{\left(\frac{\partial\kappa}{\partial h_1}\Delta h_1\right)^2 + \left(\frac{\partial\kappa}{\partial h_3}\Delta h_3\right)^2} \tag{23}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{h_3}{(h_1 - h_3)^2}\Delta h_1\right)^2 + \left(\frac{h_1}{(h_1 - h_3)^2}\Delta h_3\right)^2} \tag{24}$$

Damit erhält man die Tabelle

Tabelle 2: Die Adiabatenkoeffizienten aus der Messung nach Clément-Desormes

| $h_1$ $[cm]$ | $h_3$ $[cm]$ | $\kappa$ |
|---|---|---|
| 6,8 | 1,4 | $1{,}259 \pm 0{,}036$ |
| 6,0 | 1,2 | $1{,}250 \pm 0{,}040$ |
| 7,8 | 1,6 | $1{,}258 \pm 0{,}032$ |
| 8,3 | 1,6 | $1{,}239 \pm 0{,}029$ |

statistischer Fehler fehlt

Als Mittelwert der Adiabatenkoeffizienten ergibt sich, mit Fehler nach Gauß $\boxed{\kappa = 1{,}252 \pm 0{,}018}$.

### Berechnung nach Rüchardt

Es werden nun aus der Messung nach Rüchardt die Werte der Adiabatenkoeffizienten nach Gleichung (22) bestimmt, nach Einsetzen des Druckes nach Gleichung (12):

$$\kappa = \frac{4mV}{r^4 T^2 (p_0 + \frac{mg}{\pi * r^2})} \tag{25}$$

Dazu werden jeweils zunächst die gemessenen Zeiten für 50 Perioden mit ihren Fehlern auf eine Periode umgerechnet, und entsprechend in die Formel eingesetzt. Der Fehler ergibt sich dabei durch

unschön

$$\Delta\kappa = \sqrt{\left(\frac{\partial\kappa}{\partial m}\Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial\kappa}{\partial V}\Delta V\right)^2 + \left(\frac{\partial\kappa}{\partial r}\Delta r\right)^2 + \left(\frac{\partial\kappa}{\partial T}\Delta T\right)^2 + \left(\frac{\partial\kappa}{\partial p_0}\Delta p_0\right)^2 + \left(\frac{\partial\kappa}{\partial g}\Delta g\right)^2} \tag{26}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{4\pi^2 V p_0}{T^2\left(\pi p_0 r^2 + gm\right)^2}\Delta m\right)^2 + \left(\frac{4\pi m}{T^2 r^2\left(\pi p_0 r^2 + gm\right)}\Delta V\right)^2 + \left(\frac{8\pi V m\left(2\pi p_0 r^2 + gm\right)}{T^2 r^3\left(\pi p_0 r^2 + gm\right)^2}\Delta r\right)^2 + \left(\frac{8\pi V m}{T^3 r^2\left(\pi p_0 r^2 + gm\right)}\Delta T\right)^2 +} \tag{27}$$

$$= \kappa\sqrt{\left(\frac{\Delta m \pi p_0 r^2}{m\left(\pi p_0 r^2 + gm\right)}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta r\left(2\pi p_0 r^2 + gm\right)}{r\left(\pi p_0 r^2 + gm\right)}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta p_0 \pi r^2}{\pi p_0 r^2 + gm}\right)^2 + \left(\frac{\Delta g m}{\pi p_0 r^2 + gm}\right)^2} \tag{28}$$

Dies führt mit den entsprechenden Messparametern im Fall der Messung von Luft zu $\boxed{\kappa = 1{,}393 \pm 0{,}029}$, und für Argon zu $\boxed{\kappa = 1{,}441 \pm 0{,}035}$.

# Diskussion

## Diskussion

### Methode nach Clément-Desormes

Um einen Vergleichswert für den Adiabatenkoeffizienten der Luft zu erhalten, wird ein gewichteter Mittelwert aus den verschiedenen Komponenten der Luft und deren Adiabatenkoeffizienten gebildet, die der entsprechenden Tabelle im Script[3] entnommen wurden. Luft setzt sich dabei in Hauptanteilen aus etwa 78,1 % biatomaren Stickstoff, 20,9 % biatomarem Sauerstoff und 0,9 % monoatomaren Argon zusammen. Zusammen mit den Werten aus der genannten Tabelle erhält man so als gewichteten Wert für den Adiabatenkoeffizient von Luft etwa 1,400.

sehr gut!

Der Vergleich zum durch die Methode nach Clément-Desorme erhaltenen Wert von $1{,}252 \pm 0{,}018$ liefert eine Sigmaabweichung von 8,22. Diese Abweichung ist signifikant. Dies ist wahrscheinlich mitunter auf den recht kleinen Fehler des experimentellen Wertes zurückzuführen, dieser beträgt nur etwa 1,4 %. Eine mögliche Unterschätzung des Fehlers ist denkbar, beispielsweise durch eine überschätzte Ablesegenauigkeit der Drücke am Manometer.

Ja!

Eine Möglichkeit die Genauigkeit der Bestimmung zu verbessern ist eine Durchführung von weiteren Messungen. So wurde im genutzten Video die Messung nicht wie gefordert insgesamt sechs, sondern nur vier mal durchgeführt, was eine sehr kleine Anzahl an Messungen darstellt.

### Methode nach Rüchardt

Vergleicht man den nach Rüchardt erhaltenen Wert von $1{,}393 \pm 0{,}029$ für Luft mit dem oben errechneten theoretisch erwarteten Wert, so stellt man nur noch eine Sigmaabweichung von 0,24 fest, die Werte sind also sehr gut kompatibel.

Erfolgt noch der Vergleich zwischen den beiden experimentellen Werten für Luft, so stellt man eine Sigmaweichung von 4,13 fest. Die Ergebnisse der beiden Methoden sind also untereinander nicht kompatibel. Es besteht also eher Zweifel an der Gültigkeit der ersteren Methode, als an der Gültigkeit der theoretischen Vorhersage. Der Vergleich mit weiteren Methoden könnte hier weitere Klarheit schaffen.

In der Tat liefert diese Methode unter Rücksichtnahme auf den eher größeren Fehler den sie mit sich bringt äußerst kompatible Ergebnisse. Zwar besteht die Möglichkeit, dass der Fehler des Wertes etwas überschätzt wurde, da die

[3]Wagner, Jens: „Physikalisches Praktikum PAP 2.1 für Studierende der Physik“, 2019, S. 35

Fehler im Video durch die Verlangsamungsfunktion sehr gering gehalten werden konnten, und ein Fehler von 0,5 s für die menschliche Reaktionszeit auch sehr hoch angesetzt ist, doch würde sogar eine gewisse Verringerung des Fehlers das Ergebnis immer noch nicht inkompatibel machen, die Werte passen sehr gut.

Vergleicht man abschließend das Ergebnis für den Adiabatenkoeffizienten von Argon von $1{,}441 \pm 0{,}035$, mit dem Wert 1,648 aus der zuvor bereits herangezogenen Tabelle[4], so beträgt die Sigmaabweichung 5,91. Diese Abweichung ist zwar geringer als die im ersten Versuchsteil vom dort erwarteten Wert, doch ist sie dennoch signifikant, und stellt die Gültigkeit der Methode, beziehungsweise die Fehlerfreiheit der Durchführung in Frage. Da hier die Fehler teilweise noch größer gewählt wurden (z. B. für den Radius des Schwingkörpers), und der relative Fehler des Ergebnisses größer ausfällt als der für Luft, ist es um so erstaunlicher, dass die Methode hier zu versagen scheint. Eventuell könnte ein Fehler bei der Durchführung des zweiten Teils mit Argon vorliegen, beispielsweise kommt aufgrund der Abweichung nach unten eine Vermischung des Argongases mit Luft in Betracht - Dieser Effekt alleine sollte aber, wenn die Wartezeit zwischen den Messungen nicht völlig vernachlässigt wurde - Nicht zu einer derart extremen Abweichung führen. Ja

## Abschließendes Fazit

Insgesamt liefern beide Methoden noch Ergebnisse, die teilweise stark von der Erwartung abweichen. Dies kann aber eventuell durch Wahl größerer Fehler, oder weitere Messreihen behoben werden.

[4] Wagner, Jens: „Physikalisches Praktikum PAP 2.1 für Studierende der Physik“, 2019, S. 35