

Ausarbeitung Versuch 243 Boltzmannkonstante II: Thermisches Rauschen

Lucas Eekhof

Einleitung

Motivation

Reale elektrische Geräte mit Temperaturen über dem Nullpunkt weisen bei ausreichend genauer Messung stets eine Unruhe in ihren Spannungswerten auf, welches durch alleinige Betrachtung des idealen Schaltkreises nicht erklärt werden kann. Dieses Rauschen ist auf thermische Effekte zurückzuführen, und wird bei sehr präzisen Messungen relevant. In diesem Versuch sollen die Ursachen des thermischen Rauschens erkundet und ein entsprechendes Verständnis entwickelt werden, um es zu ermöglichen das Rauschen in weiteren Versuchsaufbauten je nach Bedarf zu minimieren, oder in die Betrachtung der Ergebnisse mit einzubeziehen. Eine genaue Quantifizierung des Rauschens erlaubt außerdem unter Ausnutzung der Nyquist-Beziehung eine Bestimmung des Boltzmann-Konstante.

Physikalischer Hintergrund

Rauschen

Aufgrund der Brownschen Bewegung der Ladungsträger in einem Leiter einer Temperatur > 0 K sind bei genauer Messung stets variierende elektrische Potentiale festzustellen. Die so gegebenen Potentialdifferenzen bezeichnet man als Rauschspannung U_r . Da die Brownsche Bewegung der Ladungsträger ungerichtet ist gilt für ihren zeitlichen Mittelwert:

$$\langle U_r \rangle = \lim_{t' \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t'} \int_0^{t'} U_{r(t)} dt \right) = 0 \quad (1)$$

Für ausreichend lange zeitliche Mittlung wird sich der Wert also beliebig nahe an Null annähern. Um nun allerdings die Stärke des Rauschens quantifizieren zu können wird, in grober Analogie zum quadratischen Mittel der Geschwindigkeit bei thermischen Teilchen, ihr Effektivwert definiert als:

$$\sqrt{\langle U_r^2 \rangle} = \sqrt{\lim_{t' \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t'} \int_0^{t'} U_{r(t)}^2 dt \right)} \quad (2)$$

Dabei gilt für diesen Effektivwert bei einer Temperatur T des Widerstandes R für eine Messung über die Bandbreite Δf die Nyquist-Beziehung:

$$\langle U_r^2 \rangle = 4kTR\delta f \quad (3)$$

Die Gültigkeit dieser Formel ist leicht einsehbar: Eine höhere Temperatur muss aufgrund der verstärkten Brownschen Bewegung der Ladungsträger zu einem verstärkten Rauschen führen, daher die Proportionalität in der Temperatur. Nach dem ohmschen Gesetz ist die Spannung bei gleicher Stromstärke, also Bewegung der Ladungsträger, direkt proportional zum Widerstand, dies zeigt sich ebenso in der Gleichung. Um die Bandbreitenabhängigkeit zu erklären ist es nötig zu beachten dass es sich hier um ein weißes Rauschen handelt, das heißt ein Rauschen, welches auf allen Frequenzbändern gleichermaßen auftritt. Dadurch vergrößert sich der Effektivwert proportional zur Breite des Frequenzbandes, auf dem er vermessen wird.

Bestimmung der Boltzmannkonstante

Die Boltzmannkonstante lässt sich aus dem Effektivwert der Rauschspannung nun über die Nyquist-Beziehung (3) leicht bestimmen, vorausgesetzt die Temperatur, den Widerstand und die Bandbreite der Messung sind bekannt. Da

die Rauschspannung auch bei hohen Temperaturen noch sehr gering sein kann, sind einige spezielle Anforderungen an den Messaufbau gestellt.

So muss der Widerstand, an dem die Spannung gemessen wird beispielsweise gegenüber Störsignalen wie zum Beispiel dem Netzrauschen abgeschirmt werden, damit diese nicht das schwache Signal überschatten. Auch ist eine Signalverstärkung um ein Vielfaches nötig, um das Signal messbar zu machen. Zudem muss die Bandbreite durch einen Bandpassfilter eingeschränkt werden - Der Verstärker ist in diesem Fall nicht noch zusätzlich zur Bandbreitenregulierung geeignet, da er unabgeschirmt sehr anfällig gegenüber Störquellen ist, und diese verstärken würde, zudem sind die Ränder seines Frequenzbandes nicht ausreichend scharf definiert.

Zu beachten ist, dass die verwendeten Elemente selbst zum Rauschen beitragen. So muss diese Rauschverfälschung durch den Verstärker beachtet werden. Wird der Bandpassfilter hinter dem Verstärker geschaltet, ist sein Rauschen vernachlässigbar. Der Effektivwert des Rauschens im Verstärker $\langle U_v^2 \rangle$ trägt zum Gesamtwert $\langle U_{r+v}^2 \rangle$ bei nach:

$$\langle U_{r+v}^2 \rangle = \langle (U_r + U_v)^2 \rangle = \langle U_r^2 \rangle + \langle U_v^2 \rangle + 2\langle U_r \rangle \langle U_v \rangle \quad (4)$$

Wobei der hintere Summand nach Gleichung (1) bei ausreichend langer Messung verschwindet, so ergibt sich die Additivität der quadratischen Effektivwerte:

$$\langle U_{r+v}^2 \rangle = \langle U_r^2 \rangle + \langle U_v^2 \rangle \quad (5)$$

Um die Boltzmannkonstante mit dem Messaufbau bestimmen zu können, ist zusätzlich noch Kenntnis über seinen Frequenzgang $g(f)$ nötig:

$$g(f) = \frac{U_{aus}(f)}{U_{ein}} \quad (6)$$

Denn mit diesem Wert muss der gemessene Ausgangswert $\langle U_{aus}^2 \rangle$ normiert werden, da der Frequenzgang das Signal überlagert, nach:

$$d\langle U_{aus}^2 \rangle = g_{(f)}^2 d\langle U_r^2 \rangle = 4kTR g_{(f)}^2 df \quad (7)$$

Also in integraler Form mit $B := \int_0^\infty g_{(f)}^2 df$ als der experimentell zu bestimmenden äquivalenten Rauschbandbreite:

$$\langle U_{aus}^2 \rangle = 4kTR \int_0^\infty g_{(f)}^2 df = 4kTRB \quad (8)$$

Beachtet man nun, dass sich das Verstärkerrauschen nach (5) zum Ausgangssignal addiert, erhält man schlussendlich für die Boltzmannkonstante:

$$k = \frac{\langle U_{aus}^2 \rangle - \langle U_v^2 \rangle}{4TRB} \quad (9)$$

Versuchsanordnung

Material

Die folgenden Geräte und Messapparaturen werden für den Versuch verwendet:

- Batterienetzteil
- Zimmerthermometer
- Ohmsche Widerstände in gemeinsamen Gehäuse
- Rauscharmer 60 dB (x1000)-Verstärker mit zuschaltbarem Bandpassfilter
- Dämpfungsglied -60 dB (/1000)
- Heizbarer Widerstand (4 kΩ bei 273,15 K) mit regelndem Netzteil
- Oszilloskop mit Spektrumanalysator
- Funktionsgenerator
- Multimeter (Agilent HP34401A)

Anordnung

Für den primären Aufbau wird das Rauschsignal des zu untersuchenden abgeschirmten ohmschen Widerstandes durch den Verstärker geleitet, dessen Ausgangssignal wird nach Passieren des Bandpassfilters in das Multimeter zur Messung des Effektivrauschwertes eingekoppelt:

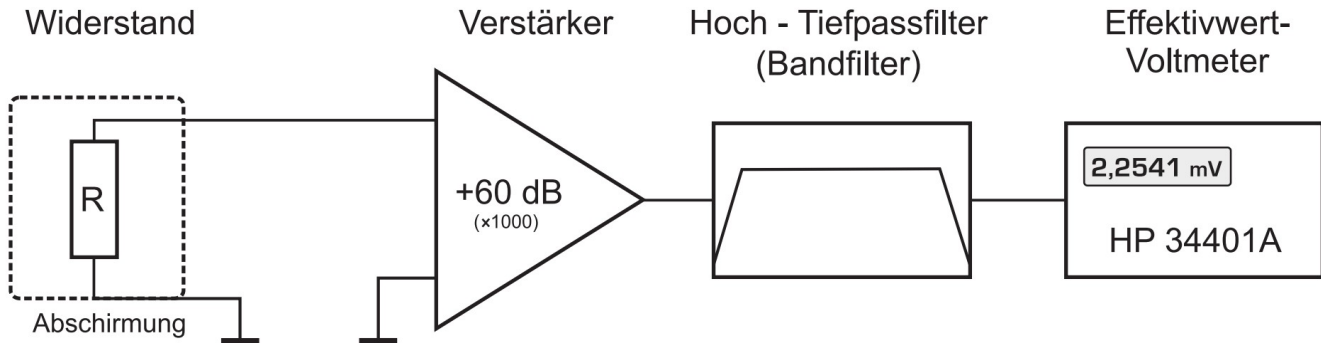


Abbildung 1: Der Schaltplan des Aufbaus zur Messung des Rauschens¹

Der Verstärker wird, um Einwirkungen durch Netzrauschen zu minimieren, durch eine Batterie betrieben.

Um zu Beginn des Versuchs den Frequenzgang zu bestimmen wird nicht der ohmsche Widerstand als „Spannungsquelle“ eingekoppelt, sondern ein computergesteuerter Frequenzgenerator, der jedoch hinter das Dämpfungsglied in Reihe geschaltet wird. Das Signal wird dann nicht mit dem Voltmeter ausgelesen, sondern über ein Oszilloskop an den Computer übermittelt. Der Effektivwert der Eingangsspannung wird auf $0,200\text{ V}$ gesetzt. Unter Berücksichtigung der angelegten Dämpfung D und der Gleichung (6) ergibt sich so für den Frequenzgang:

$$g(f) = \frac{1}{D} \sqrt{\frac{\langle U_{aus}^2 \rangle}{\langle U_{ein}^2 \rangle}} \quad (10)$$

Abschließend wird im anfänglichen Messaufbau der abgeschirmte Widerstand durch den beheizbaren Widerstand ersetzt.

Messprotokoll

Frequenzgang

Zunächst soll der Frequenzgang des Aufbaus bestimmt werden. Der dazu beschriebene Aufbau wird präpariert, und das dafür vorgesehene Programm am Computer ausgeführt. Dabei ergibt sich die im Folgenden genutzte Messreihe unter <https://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/info/Corona/Frequenzgang.txt>, abgerufen am 14.03.2021.

Alle folgenden Messungen wurden am 14.03.2021 dem Video unter <https://www.youtube.com/watch?v=RJ0wFQYAxQc> entnommen.

Widerstände bei konstanter Temperatur

Nun können die Messungen am Rauschspannungsaufbau durchgeführt werden. Es werden sechs Widerstände R von $5\text{ k}\Omega$ bis $30\text{ k}\Omega$ in Schritten von $5\text{ k}\Omega$ vermessen. Bei jeder Messung werden etwa 100 Einzelmessungen vorgenommen, das genutzte Messprogramm zeigt Mittelwert $\sqrt{\langle U_r^2 \rangle}$ und Standardabweichung σ an. Um den Fehler $\Delta\sqrt{\langle U_r^2 \rangle}$ zu erhalten muss nur die Standardabweichung durch die Wurzel der Zahl an Messungen N geteilt werden. Außerdem wird noch eine Messung bei $0\text{ k}\Omega$, also einem Kurzschluss, vorgenommen, um das Verstärkerrauschen zu bestimmen. Damit ergibt sich:

¹Wagner, Jens: „Physikalisches Praktikum PAP 2.2 für Studierende der Physik“, 2019

Tabelle 1: Die Rauschspannungen bei verschiedenen Widerständen

Messung	R [Ω]	N	σ [mV]	$\sqrt{\langle U_r^2 \rangle}$ [mV]	$\Delta\sqrt{\langle U_r^2 \rangle}$ [mV]
1	0	101	0,006	1,367	0,0006
2	5	102	0,010	2,409	0,0009
3	10	102	0,013	3,119	0,0012
4	15	101	0,013	3,702	0,0013
5	20	102	0,014	4,207	0,0014
6	25	102	0,016	4,666	0,0016
7	30	100	0,019	5,084	0,0002

Es wird außerdem die Zimmertemperatur zu 295,170 K bestimmt, der Fehler wird auf $\pm 0,100$ K geschätzt.

Heizwiderstand

Schließlich werden noch Messungen am beheizten Widerstand vorgenommen. Es wird auf gleiche Weise wie zuvor der Wert der Rauschspannung aufgenommen, zusätzlich wird der Widerstand mithilfe des Multimeters gemessen, und die Temperatur T aufgezeichnet, letztere nur in einer Messung:

Tabelle 2: Die Rauschspannungen, Temperaturen und Widerstände am Heizwiderstand

Messung	T [K]	R [k Ω]	N	σ [mV]	$\sqrt{\langle U_r^2 \rangle}$ [mV]	$\Delta\sqrt{\langle U_r^2 \rangle}$ [mV]
1	323,301	4,778	97	0,009	2,451	0,0009
2	374,500	5,561	100	0,011	2,728	0,0011
3	425,210	6,324	101	0,012	3,006	0,0011
4	477,120	7,093	102	0,013	3,297	0,0013

Auswertung

Alle verwendeten Scripte sind der Ausarbeitung angehängt. Sie folgen den Anweisungen des Scripts².

Da die Fehler der Widerstände kleiner als 0,500 %, und die des Voltmeters kleiner als 0,300 % sind, werden sie im Folgenden vernachlässigt, und sind auch durch die Bildung von Standardabweichungen teilweise schon berücksichtigt. Zudem würde der genutzte Least-Square-Fitalgorithmus ohnehin die Fehler auf der Widerstandsachse nicht berücksichtigen können, dazu müsste beispielsweise Orthogonal-Distance-Regression verwendet werden.

Graphische Darstellung der Messdaten

Der gemessene Frequenzgang wird aus dem entsprechenden Datensatz heraus geplottet, dabei werden die Werte welche nahe an null liegen herausgelicdet:

²Wagner, Jens: „Physikalisches Praktikum PAP 2.2 für Studierende der Physik“, 2019

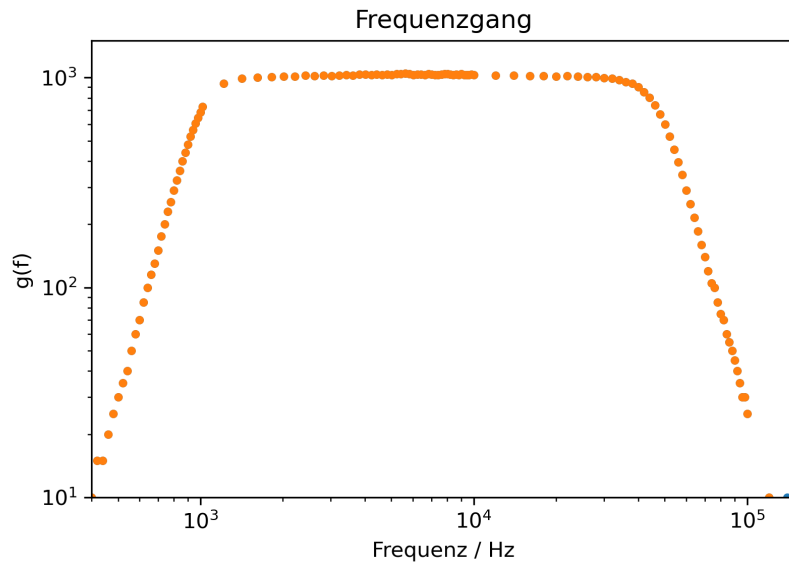


Abbildung 2: Der logarithmische Verlauf des Phasenganges

Funktion fitten

Nun wird eine Kurve der den hier verwendeten Bandpassfilter beschreibenden Funktion $\frac{V}{\sqrt{\left(1 + \frac{\Omega_1^{2n_1}}{f^{2n_1}}\right) \left(1 + \frac{\Omega_2^{2n_2}}{f^{2n_2}}\right)}}$ durch die Messpunkte gefittet:

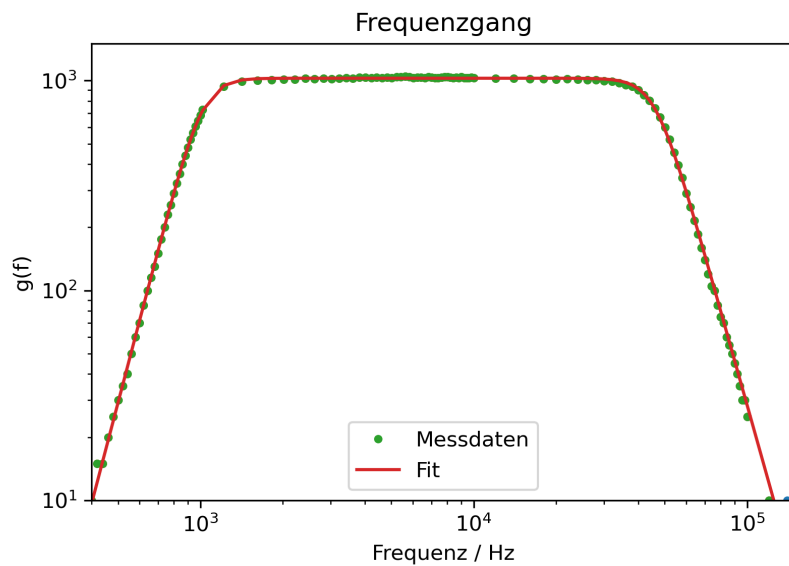


Abbildung 3: Die gefittete Funktion für den Phasengang

Numerische Integration

Es wird nun die Fitfunktion quadriert und numerisch integriert. Es ergibt sich der Wert für B : $4,854 \cdot 10^{10} \frac{V^2}{s}$

Bestimmung der Boltzmann-Konstante

Es wird nun die Boltzmannkonstante bestimmt. Dazu wird zunächst die Differenz $\langle U_{aus}^2 \rangle - \langle U_v^2 \rangle$ berechnet, ihr Fehler ergibt sich zu $\sqrt{2}\sqrt{\Delta\langle U_{aus}^2 \rangle\langle U_{aus}^2 \rangle + \Delta\langle U_v^2 \rangle\langle U_v^2 \rangle}$. Damit erhält man:

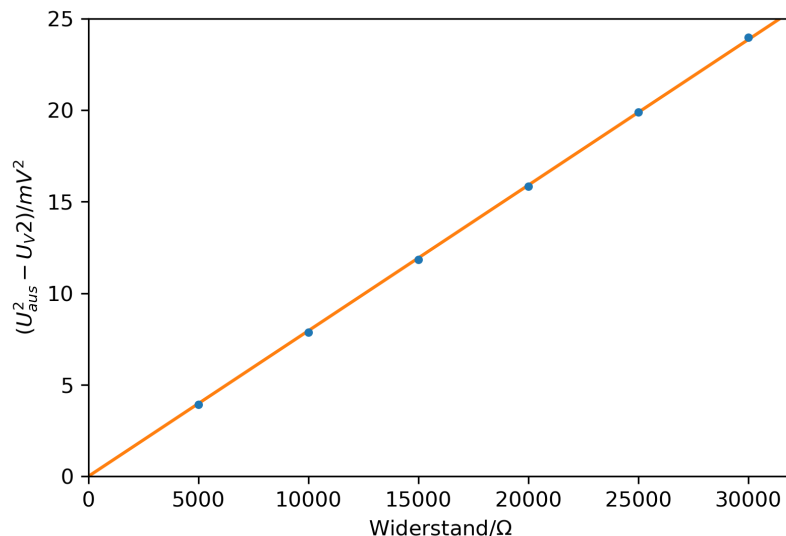


Abbildung 4: Widerstandsmessdaten mit linearem Fit

Die Steigung der gefitteten Geraden beträgt $(7,9527 \pm 0,0191) \cdot 10^{-4} \frac{mV^2}{\Omega} = (7,9527 \pm 0,0191) \cdot 10^{-10} \frac{V^2}{\Omega}$.

Nun gilt aber für diese Steigung c nach Gleichung (9):

$$c = 4kTB \iff k = \frac{c}{4TB} \quad (11)$$

Wofür nun der oben errechnete Wert von B , mit einem geschätzten Fehler von 2%, und die gemessene Raumtemperatur eingesetzt wird. Der Fehler berechnet sich zu:

$$\Delta k = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial c} \Delta c\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial T} \Delta T\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial B} \Delta B\right)^2} \quad (12)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{4BT} \Delta c\right)^2 + \left(\frac{c}{4BT^2} \Delta T\right)^2 + \left(\frac{c}{4B^2T} \Delta B\right)^2} \quad (13)$$

$$= k \sqrt{\left(\frac{\Delta c}{c}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2} \quad (14)$$

Was also insgesamt liefert: $k = (1,3877 \pm 0,0280) \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$.

Bestimmung über Heizwiderstand

Die Auswertung der Daten zum Heizwiderstand erfolgt analog. Es wird wieder eine Gerade gefittet, zunächst nur mit der Steigung als freiem Parameter:

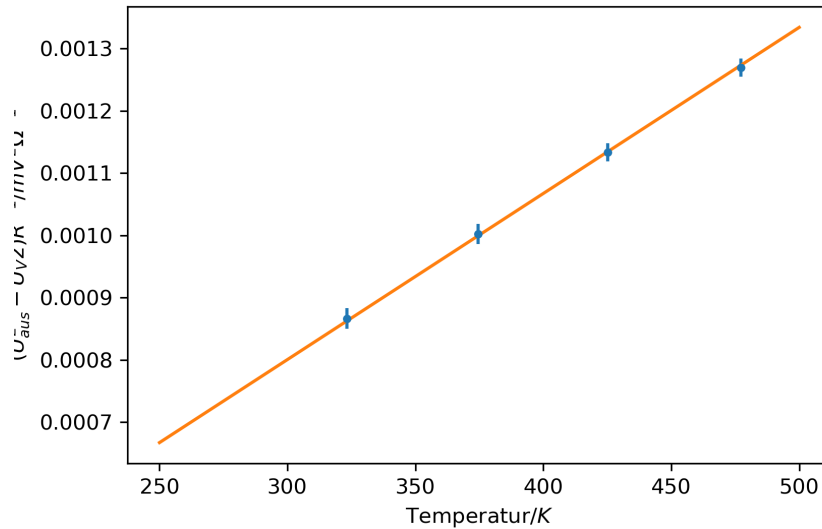


Abbildung 5: Die Werte der Heizwiderstände gegen die Temperatur

Als Steigung ergibt sich hier $(2,6679 \pm 0,0044) \cdot 10^{-6} \frac{\text{mV}^2}{\Omega} = (2,6679 \pm 0,0044) \cdot 10^{-12} \frac{\text{V}^2}{\Omega}$. Hierbei wurde genutzt dass

$$\frac{\langle U_{aus}^2 \rangle - \langle U_v^2 \rangle}{R} = c'T \quad (15)$$

mit $c' = 4kB$, es folgt also daraus dass $k = \frac{c'}{4B}$. Damit ergibt sich, mit dem Fehler nach

$$\Delta k = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial c'} \Delta c'\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial B} \Delta B\right)^2} \quad (16)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{4B} \Delta c'\right)^2 + \left(\frac{c'}{4B^2} \Delta B\right)^2} \quad (17)$$

$$= k \sqrt{\left(\frac{\Delta c'}{c'}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2} \quad (18)$$

Insgesamt der Wert $k = (1,3741 \pm 0,0274) \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$.

Extrapolation des Temperaturnullpunktes aus der Heizmessung

Im Fit der Heizmessung wird nun auch der Temperaturnullpunkt als freier Parameter gewählt. Der Fittingalgorithmus bestimmt diesen auf $(-8,0372 \pm 1,4788) \text{K}$.

Diskussion

Zusammenfassung

In diesem Versuch konnte also ein wesentliches Verständnis des Phänomens der Rauschspannung gewonnen werden - Zudem wurde der Effekt genutzt, um die Boltzmann-Konstante auf zwei leicht verschiedene Varianten zu bestimmen.

Diskussion

Literaturvergleich und Vergleich untereinander

Vergleicht man den Wert für die Boltzmannkonstante aus der ersten, reinen Widerstandsmessreihe von $(1,3877 \pm 0,0280) \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$ mit dem, mittlerweile exakt festgelegten, Wert aus der Literatur von $1,381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$, so stellt man fest, dass der Literaturwert innerhalb des Fehlerbereiches des Messwertes liegt. Die relative Abweichung vom Literaturwert beträgt etwa 0,511 %.

Zieht man den Wert aus der Heizwiderstandsmessung heran, so erkennt man dass auch dieser Wert in seinen Fehlergrenzen mit dem Literaturwert kompatibel ist. Die relative Abweichung beträgt hier nur etwa 0,475 %.

Auch sind die beiden bestimmten Werte untereinander in ihren Fehlerbereichen kompatibel, die relative Abweichung des Heizwiderstandswertes vom Wert der verschiedenen Widerstände liegt bei knapp 0,990 %.

Güte der Fits

Um die Qualität der Fits zu betrachten, werden die χ -Quadrate und Fitwahrscheinlichkeiten herangezogen. Bei der ersten Messung an den Widerständen ergibt sich ein χ_{red}^2 von ungefähr 1,333, sowie eine Fitwahrscheinlichkeit von etwa 25 %. Dies zeigt, dass zukünftige Messungen mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 % zu kleineren mittleren Abständen der Fitkurve von den Messwerten führen würden. Für die Messungen am Heizwiderstand ergibt sich ein χ_{red}^2 von ungefähr 0,080, sowie eine Fitwahrscheinlichkeit von etwa 92 %. Das bedeutet dass zukünftige Messungen nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 8 % zu einem kleineren χ_{red}^2 führen würden. Somit hat der Fit über den Heizwiderstand eine höhere Güte als der über die verschiedenen Widerstände.

Kritik

Um den Versuch in seinen Ergebnissen zu verbessern, hätten noch einige Dinge beachtet werden können. So wurde beispielsweise das Rauschen in Bandpassfilter und Voltmeter vernachlässigt - Zwar ist es sehr klein gegenüber dem aus dem Verstärker empfangenen Signal, es sollte sich um den Faktor 1000 unterscheiden, doch müsste es für eine optimale Messung berücksichtigt werden. Auch die Kabel unterliegen einem gewissen Rauschen und Interferenz durch umgebende Störquellen. Sie hätten ebenso abgeschirmt werden sollen - Bestenfalls in separaten Bereichen, um Störungen untereinander zu minimieren. Die Abschirmung könnte generell beliebig verstärkt werden, allerdings hätte dies ab einem gewissen Punkt aufgrund des abnehmenden Abfalls störender Felder über die Wanddicke nur noch einen verschwindenden Einfluss auf die Güte der Messungen.

Um die Fehler noch besser abzuschätzen könnte man, wie oben bereits angesprochen, noch versuchen die Fehler der Widerstände und des Voltmeters zu berücksichtigen, dazu wäre allerdings teilweise die Verwendung eines anderen Fittingalgorithmus (z. B. ODR) nötig. Prinzipiell sind die manche dieser Fehler aber auch durch Bildung des Mittelwertes und der Standardabweichung bereits berücksichtigt.

Systematisch auffällig ist auch die Verwendung einer Näherungsformel für die Temperatur des Platinwiderstandes. Wollte man den Versuch stark verbessern, so ist es eventuell nötig höhere Ordnungen der Näherungsformel heranzuziehen. Außerdem wurden über dem Heizwiderstand nur vier Messpunkt aufgenommen, diese Zahl sollte noch erhöht werden. Generell würde es in beiden Versuchsteilen zur Genauigkeit der Daten beitragen, noch mehr Messpunkte abzunehmen - Für den Widerstandsaufbau wäre beispielsweise der Einsatz eines Potentiometers denkbar.