ASTRO2 Cheatsheet

1 Einführung

Hubbelsche Fluchtgeschwindigkeit:
$v = H_0 d$
Rotverschiebung:
$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{emit}}{\lambda_{emit}}$

2 Entfernungen

Entfernung aus Parallaxe ω:
$d[pc] = \frac{1 arcsec}{\omega[arcsec]}$
Radialgeschwindigkeiten von Bedeckungsveränderlichen aus großen Halbachsen und Periode:
$a_1 + a_2 = \frac{T}{2\pi}(v_1 + v_2)$
Entfernungsmodul aus scheinbarer m und Absoluter M Magnitude:
$\mu = m - M = 5\log(d[pc]) - 5$
Entfernungsmodul mit Extinktionskorrektur:
$m - M = 5\log(d[pc]) - 5 + A$
Extinktion:
Blaues licht wird durch Staub effizienter absorbiert als rotes.
Farbexzess:
$E_{B-V} = (B-V)_{obs} - (B-V)_{emit} = A_B - A_V$
$A_B = B_{obs} - B_{emit}; A_V = V_{obs} - V_{emit}$
$A_V = R_V E_{B-V}$
Supernovae 1a:
Weißer Zwerg überschreitet Chandrasekhar-Limit durch Akkretion eines Riesen- oder Hauptreihensterns, oder zwei weiße Zwerge verschmelzen.
Standardkerzen für Galaxien außerhalb der lokalen Gruppe.

3 Milchstraße

Dicke Scheibe hat niedrigere Metallizität als dünne Scheibe. Metallizität nimmt nach außen hin ab. Sternentstehung nur in Scheibe. Megnetfeld durch alles Gas. Halo 1000 mal mehr DM als baryonische Materie. Sterne mit weniger als $8M_\odot$ enden als weißer Zwerg, darüber Typ 2 Supernovae.
Metallizität:
$[\frac{X}{Y}] = \log_{10}\left(\frac{N_X}{N_Y}\right)_* - \log_{10}\left(\frac{N_X}{N_Y}\right)_\odot$
Galaktische Koordinaten:
(d, l, b) (Entfernung d, Winkel zwischen Galaxiezentrum und Objekt auf der Scheibenebene l und Höhenwinkel b)
SKIZZE

4 Gravitationslinsen

AR-Lichtablenkung bei nächster Annäherung ξ an Linsenmasse M:
$\alpha = \frac{4GM}{c^2\xi}$ (Faktor 2 größer als Newton)
$\alpha = -\frac{D_{DS}}{D_D D_S}\frac{4GM}{c^2\Theta}$ (D_D Beobachter - Linse; D_{DS} Linse - Quelle; D_S Beobachter - Quelle)
Einsteinradius:
$\Theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2}\frac{D_{DS}}{D_D D_S}} = \sqrt{\frac{2R_{Schwarzschild}D_{DS}}{D_D D_S}}$
$\xi = \Theta_E D_D$ Daraus Position der Bilder:
$\Theta_{1,2} = \frac{1}{2}(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\Theta_E^2})$ mit $\beta = \Theta - \frac{\Theta_E^2}{\Theta}$

5 Galaxien

Ellipsenförmige meist rot und tot.
Sersic-Profil für spheroide Galaxien:
$I_{(r)} = I_e 10^{-b_n\left[\left(\frac{r}{r_e}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right]}$ mit projiziertem Halblichtradius r_e, Flächenhelligkeit bei r_e I_e, Sersic-Index n und $b_n \approx 0,868n - 0,142$
Exponentielles Helligkeitsprofil für Scheibengalaxien aus Skalenradius:
$I_{(r)} = I_0 e^{-\frac{R}{R_d}} \Longrightarrow L_{tot} = 2\pi I_0 R_d^2$

6 Spiralgalaxien

Absolute Leuchtkraft auf Sonne bezogen:
$M_{bol} = -2,5 \cdot \log\left(\frac{L}{L_\odot}\right)$
Tully-Fisher-Relation zwischen Rotationsgeschwindigkeit und Gesamthelligkeit:
$L \propto v_{rot}^{3...4}$ (Exponent je nach Wellenlängenbereich)
Aus Tully-Fisher folgende Konstanz der zentralen Flächenhelligkeit (Freemansches Gesetz):
$L \propto \frac{\left(\frac{M}{L}\right)^{-2} v^4}{I} \Longrightarrow \frac{\left(\frac{M}{L}\right)^2}{I} = const$
Stabilitätskriterium für Scheiben:
$Q = \frac{\sigma_r \kappa}{3{,}4G\Sigma}$ stabil wenn $Q > 1$, ansonsten Spiralstruktur und Balken (Radiale Geschwindigkeitsdispersion σ_r, Epizyklenfrequenz κ^2 bei R, Kreisfrequenz Ω^2
Spiralarme sind ein Dichtewellenphänomen aus wechselnd verschiedenen Sternen.

7 Elliptische Galaxien

Eliptische Galaxien haben mittelalte Sterne (vor allem niedermasssige Galaxien), und ein zentrales supermassives schwarzes Loch, sowie eine röntgenstrahlende Gascorona. Flächenhelligkeitsprofil nach Sersic (n=4 "Vascouleurs"). Etwas höheren Anteil dunkler Materie als Spiralgalaxien, mittelalte Sterne. Sie entstehen meist aus Mergern von Galaxien, Halos absorbieren dabei Impuls und Drehimpuls. Heißes interstellares Medium.

Helligkeit aus Vaucouleurs aus projiziertem Halblichtradius und Flächenhelligkeit an ihm:
$L_{ges} = 7,125\pi \cdot I_e r_e^2$
Zeit bis zur Einstellung eines thermodynamischen Gleichgewichts:
$t_{relax} \approx \frac{N}{8\ln(N)} t_{orbit}$
Masse innerhalb des Radius r:
$M_{(<r)} \approx 4 \cdot 10^{11} \cdot M_\odot T[10^7 K] \cdot r[10kpc]$
Galaxien sind nicht im th. Gleichgewicht.
El. Gal. mit Discy Helligkeitsprofilen sind rotationsabgeflacht, mit Boxy-Profilen anisotropieabgeflacht.
Faber-Jackson-Relation für Geschwindigkeitsdispersion und Leuchtkraft von elliptischen Galaxien:
$L_B \propto \sigma^4$ oder $\log(\sigma) = -0.1M_B + const$
$L_B \propto \sigma^4$ ist mit Virialsatz vereinbar wenn $I_B\left(\frac{M}{L}\right)^2 = const$
Kollision zweier Galaxien ($\frac{M_a}{M_i} = \eta$; $\left(\frac{sigma_a}{sigma_i}\right)^2 = \varepsilon$):
$\frac{R_{ges}}{R_i} = \frac{(\eta+1)^2}{\eta\varepsilon+1}; \frac{\sigma_{ges}}{\sigma_i} = \sqrt{\frac{\eta\varepsilon+1}{\eta+1}}; \frac{\rho_{ges}}{\rho_i} = \frac{(\eta\varepsilon+1)^3}{(\eta+1)^5}$

8 Zwerggalaxien

Häufigste aber leuchtschwächste ($M_\nu > -14mag; \mu_\nu < 22\frac{mag}{arcsec^2}$) Galaxientypen, Unterteilung in Spheroidale, Irreguläre, Elliptische und seltene Spiralförmige. Höhere Masse führt zu höherer Metallizität.
Zwerg-Spheroidale: Keine Sternentstehung mehr, sehr alte Population, gasarm, von dunkler Materie dominiert, >100pc
Irreguläre Zwerge: Eher gasreich.
Ultra-Compact-Dwarfs: Sehr leuchtkräftig.
Ultra-diffuse: leuchtschwach und metallarm, häufig aus einziger Population.

9 Active Galactic Nuclei

Zwei Arten von Linienverbreiterung ausgestoßener Gase: Bulk Motion beeinflusst alle Linien gleich, thermische Verbreiterung abhängig von Atommasse.
Linienverbreiterung durch Dopplereffekt:
$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta v}{c}$
Thermische Verbreiterung bei Gastemperatur T:
$\Delta v \approx \sqrt{\frac{2kT}{m}}$
Berechne für Verschiebung nötige Temperatur, wenn heißer als Balmer-Emissionstemperatur (WIE VIEL GRAD?) dann handelt es sich um nicht-thermische Verbreiterung.
Material kann nur nach Innen fallen, wenn die Eddington Leuchtkraft nicht überschritten wird:
$L_{Edd} = 4\pi\frac{GMm_{p^+}}{\sigma_T}c$ und $\sigma_T = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{c^2 m_{e^-}}\right)^2$
Jets sind teilweise scheinbar schneller als Licht ausgeworfen wegen gepulsten Lichtemissionen und kürzeren Wegen nach Flugzeit.
Nicht thermische Strahlung: Synchrotron, Inverser Compton, interner IC, Synchrotron-Selbst-Compton.
Seyfert-Galaxie Typ 2: Nur schmale Linien $\leq 1000\frac{km}{s} \Leftrightarrow \Delta\lambda \gtrsim \frac{\lambda}{300}$. Seyfert Typ 1: Schmale Linienbreiten sowie breite Linien bis zu $10000\frac{km}{s}$.
Unified Model:
SKIZZE

10 Chemische Entwicklung und Galaxienhaufen

Häufige Annahmen für chemische Entwicklung: Homogene Durchmischung, instantanes Recycling, closed Box
Closed Box ist schlecht bei dSphs, zu viele metallarme Sterne prognostiziert, Lösung: Prompt initial enrichtment
Bulge ist metallreich, Halo ist metallrarm.
In massiven Galaxien sind alte Sterne metallreich, in massearmen metallarm.
Metallizitätsentwicklung:
$Z_{(t)} = Z_{(0)} + y\log\left(\frac{M_{gas(0)}}{M_{gas(t)}}\right)$
Masse der Sterne mit geringerer Metallizität als Z:
$M_{S[<Z_{(t)}]} = M_{gas(0)}(1 - e^{-\frac{Z-Z_{(0)}}{y}})$
Ein im $\frac{\alpha}{Fe}$ über $\frac{Fe}{H}$ - Diagramm früher auftretendes Knie bedeutet eine niedrigere Sternentstehungsrate.
Massenabschätzung für Galaxienhaufen aus dem Virialsatz:
$M \approx \frac{3\sigma_V^2 R}{G}$ mit Geschwindigkeitsdispersion σ_V
$M[M_\odot] = 6 \cdot 10^{14}\left(\sigma_V[1000\frac{km}{s}]\right)^2 \cdot R[Mpc]$
Inverser Compton/Sunyaev-Zel'dovich-Effekt verschiebt niederenergetische Photonen durch Streuung an heißem Plasma zu höheren Energie $\Longrightarrow$ Galaxienhaufen erzeugen Löcher im CMB

11 Homogenes Universum

Friedmann-Gleichungen Newtonisch:
$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}\frac{\rho_0}{a^2} = -\frac{4\pi G}{3}\rho a$
$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_0}{a} - Kc^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - Kc^2$
Fälle: $K < 0 \wedge \dot{a} > 0 \Rightarrow$ Ewige Expansion; $K < 0 \Rightarrow$ Expansion bis $\dot{a} = 0$ danach Kontraktion; $K = 0 \Rightarrow \dot{a} \to 0$ für $t \to \infty$
Relativistische (Richtige) Friedmann-Gleichungen:
$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa c^2}{a^2 R_0^2} + \frac{\Lambda}{3}$
$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa c^2}{a^2 R_0^2} + \frac{\Lambda}{3}$
Mit der kosmologischen Konstanten Λ und aktueller Krümmungsradius R_0, und $\kappa \in \{-1, 0, 1\}$ offen, flach, geschlossen
Beiträge von Strahlung, Materie und dunkler Energie skalieren mit a^{-4}, a^{-3} und a^0.
Hubbleparameter:
$H_{(t)} = \frac{\dot{a}}{a}$
Friedmann heute:
$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 - \frac{\kappa c^2}{a^2 R_0^2}$
Friedmanngleichung:
$H_{(t)}^2 = H_0^2\left(\frac{\Omega_{r0}}{a_{(t)}^4} + \frac{\Omega_{m0}}{a_{(t)}^3} - \frac{\Omega_{\kappa 0}}{a_{(t)}^4} + \Omega_\Lambda\right)$ mit
$\Omega_{\kappa 0} = \frac{\kappa c^2}{H_0^2 R_0^2}$
Aus Beobachtung: $\sum_i \Omega_i = \Omega_{ges} = 1; \kappa = 0;$
$\Omega_{m0} \approx 0,3; \Omega_\Lambda \approx 0,7$
Leeres Universum:
$a_{(t)} = \frac{c}{R_0}t = H_0 t \Longrightarrow t_0 = \frac{1}{H_0}$
Flaches Universum mit nicht relativistischer Materie (Einstein-de-Sitter):
$a_{(t)} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} \Longrightarrow t_0 = \frac{2}{3H_0}$
Flaches Universum mit relativistischer Materie:
$a_{(t)} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow t_0 = \frac{1}{2H_0}$
Flaches Universum dominiert von Dunkler Energie:
$a_{(t)} = a_0 e^{H_0(t-t_0)}$ mit
$H_{(t)} = H_0 = \rho_0\sqrt{\frac{8\pi G}{3}} = const$
Nicht leeres, statisches Universum:
$\dot{a} = \ddot{a} = 0$ nur möglich bei $\kappa = +1$ und $R_0 = \frac{c}{\sqrt{4\pi G\rho_m}}$ sowie Dichte der Materie doppelt so hoch wie die der Dunklen Energie.
Kosmologische Rotverschiebung:
$\frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{emit}} = 1 + z = \frac{1}{a_{(t_{emit})}}$
Abnahme der Schwarzkörper-Temperatur mit der Rotverschiebung:
$T_{(z)} = T_0(1+z) = \frac{T_0}{a}$
Winkelentfernung (Relevante Entfernung für Gravitationslinseneffekt):
$D_A = \sqrt{\frac{\pi R^2}{\omega}}$
$D_A = \frac{D_{p0}}{1+z}$
Helligkeitsentfernung:
$D_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}}$
$D_L = (1+z)^2 D_A$
Proper Distance:
$D_p = a_{(t)} D_c$
$D_p0 = D_c = \int_{t_{(z)}}^{t_0}\frac{cdt}{a_{(t)}} = \int_0^z \frac{cdz}{H_{(z)}}$ mit $H_{(z)}$ aus der Friedman-Gleichung mit einsetzen von $\frac{1}{a} = 1 + z$
Flächenhelligkeitsänderung:
$\Sigma = \frac{Fluss}{Flaeche} = \Sigma_0\frac{D_A^2}{D_L^2} = \frac{\Sigma_0}{(1+z)^4}$
Näherungen im nahen Universum ($z \ll 1$):
$D_{p0(z)} = \frac{cz}{H_0}\left[1 - \frac{3}{4}\Omega_{m0}z\right]$
$D_{L(z)} = \frac{cz}{H_0}\left[1 + (1 - \frac{3}{4}\Omega_{m0})z\right]$
K-Korrektur:
$$m_\lambda = \underbrace{-2,5\log_{10}\left(\frac{L_\lambda}{4\pi(10pc)^2 f_{\lambda_0}}\right)}_{M_\lambda} + \underbrace{5\log_{10}\left(\frac{D_L}{10pc}\right)}_{\text{Entfernungsmodul}} + \underbrace{2,5\log_{10}(1+z) + 2,5\log_{10}\left(\frac{L_\lambda}{L_{\lambda_e}}\right)}_{K_{corr}}$$

12 Frühes Universum

Abschätzung der kinetischen Energie von thermischen Teilchen:
$E_{th} \approx k_b T$
Opazitätsgrenze:
$z = 1100; T_{RK} = 3000K$
Verhältnis Neutronen und Protonen bei Ausfrierung:
$\frac{n_n}{n_p} = e^{-\frac{[m_n - m_p]c^2}{k_B T}} \approx \frac{1}{3}$ (Aber vor Baryogenese Neutronenzerfall)
Offene Welt bleibt immer offen, geschlossene immer geschlossen.
Problematische Folgerungen Urknalltheorie: Krümmung divergiert, Magnetische Monopole, CMB nicht kausal verbunden - trotzdem homogen, Strukturen größer als Ereignishorizonte

13 Strukturbildung

Dispersionsrelation für Störungen um Universum:
$\omega^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi G\bar{\rho}$
Jeans-Kriterium für Kollaps (Nur Strukturen größer als λ_J können wachsen):
$4\pi G\bar{\rho}$ oder $\lambda_J > c_s\sqrt{\frac{\pi}{G\bar{\rho}}}$
Jeans-Zeitskala:
$\tau_J = \frac{\lambda_J}{c_s} = \sqrt{\frac{\pi}{G\bar{\rho}}}$
Jeans-Masse:
$M_J = \frac{4\pi}{3}\lambda_J^3\bar{\rho}_B$ mit baryonischer Dichte $\bar{\rho}_B$
In strahlungsdominierter Phase:
$c_s = \frac{c}{\sqrt{3}}; \lambda_J \approx 1Mpc; M_J \approx 10^{20}M_\odot$
Strukturwachstum in leerem Universum:
$D_{(t)} = const$ kein Wachstum
Strukturwachstum in Einstein-de-Sitter-Universum:
$D_{(t)} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} = a_{(t)}$ lineares Wachstum
Silk Damping unterdrückt Bildung kleiner Baryonischer Strukturen, aber nicht bei dunkler Materie.
Virialsatz:
$\langle T\rangle = \frac{k}{2}\langle V\rangle = -\frac{1}{2}\langle V\rangle$ (Für Gravitation)
Sphärischer Kollaps:
$R_{vir} = \frac{R_m ax}{2}$

14 Gammablitze

Gammablitze entstehen durch Mergerereignisse massiver Sterne oder Neutronensterne.

15 Sonstige Formeln

Winkel von a im Abstand d:
$\omega \approx \frac{a}{d}$
Größe aus Entfernung und Winkel am Himmel:
$a[AU] = d[pc] \cdot \omega[arcsec]$ (Für Radius halbieren nicht vergessen!)
Entfernung aus Rotverschiebung:
$d = \frac{zc}{H_0}$
Drittes Keplersches Gesetz:
$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$
Masse Zentralgestirn aus Periode:
$M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$
Schwarzschildradius:
$R_S = \frac{2GM}{c^2} \approx M \times 1,485 \cdot 10^{-27}\frac{m}{kg}$