1 Mechanik

1.1 Kinematik des Massenpunktes

Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung:
$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T; \vec{v} = \dot{\vec{r}}; \vec{a} = \dot{\vec{v}}$
Gleichmäßig beschleunigte Bewegung:
$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t^2 - t_0^2)$

1.1.1 Schiefer Wurf

$\vec{a}_0 = (0, 0, -g)^T, \vec{v}_0 = (v_{x,0}, 0, v_{z,0})^T, \vec{r}_0 = (0, 0, z_0)$
$\vec{r}(t) = (v_{x,0}t, 0, -\frac{1}{2}gt^2 + v_{z,0}t + z_0)$
$z(x) = -\frac{1}{2}(g/v_{x,0}^2)x^2 + (v_{z,0}/v_{x,0})x + z_0$
Wurfweite:

$$x_w = \frac{v_0^2}{2g}\sin 2\varphi\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gz_0}{v_0^2 \sin^2\varphi}}\right)$$

Optimaler Winkel: $\sin\varphi_{opt} = (2 + 2gz_0/v_0^2)^{-\frac{1}{2}}$

1.1.2 Gleichförmige Kreisbewegung

$\vec{r}(t) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi)^T$
$\vec{v}(t) = (-R\dot{\varphi}\sin\varphi, R\dot{\varphi}\cos\varphi)^T$
Winkelgeschwindigkeit: $\omega = \dot{\varphi}$
$\vec{v} = \omega \times \vec{r}, \quad \omega = v/r$
$\omega = \text{const} \Longrightarrow |\vec{r}(t)| = r = \text{const}, v = \text{const}$

1.1.3 Galilei-Transformation

$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t, \quad \vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}, \quad \vec{a}' = \vec{a}$

1.2 Newtonsche Dynamik

Impuls: $\vec{p} = m\vec{v}$

Kraft: $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)^T = \dot{\vec{p}}, \vec{F}_{ges} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$

Trägheitsprinzip (Impulserhaltung):
$\vec{p} = m\vec{v} = \text{const} \iff \vec{F} = 0$
actio gleich reactio: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

2 Kräfte und Kraftgesetze

2.1 Gravitation

Newtonsches Gravitationsgesetz:
$\vec{F}_g = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e}_r, G = 6.67 \cdot 10^{-11}$
träge Masse: $\vec{F} = m_T\vec{a}$
schwere Masse: $\vec{F} = m_s(GM_E/r_E^2)\vec{e}_r = m_s\vec{g}$
Äquivalenzprinzip: $m_{schwer} \sim m_{trge}$ bzw. $m_{schwer} = m_{trge}$ (bei dieser Wahl von $\vec{g}$)

2.2 Federkraft

Hook'sches Gesetz: $F_x = F_x(\Delta x) = -k_F\Delta x$ (kleine Auslenkungen)

2.3 Normalkraft, Zwangskräfte

Schiefe Ebene:
Gewichtskraft: $\vec{F}_g = m\vec{g}$
Normalkraft: $\vec{F}_N = mg\cos\alpha\vec{e}_y$
Hangabtriebskraft: $\vec{F}_H = mg\sin\alpha\vec{e}_x$

2.4 Reibungskräfte

Gleitreibung: $F_G = \mu_G F_N$
Haftreibung: $F_H = \mu_H F_N, \mu_H > \mu_G$

2.5 Zentripetalkräfte

Zentripetalkraft:
$\vec{F}_{zp} = m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$
$F_{zp} = m\omega^2 r = m\frac{v^2}{r}$
Corioliskraft:
$\vec{F}_c = 2m(v \times \vec{\omega})$
Bei rechtem Winkel: $F_c = 2m\omega v$

3 Arbeit, Energie, Leistung

Arbeit: $\Delta W = \vec{F}\vec{x}$

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}(t)\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

Kinetische Energie: $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$
Pot. Energie: $E_{pot} = \frac{1}{2}mx^2$ (Verformung)
Pot. Energie: $E_{pot} = mgh$ (Lageenergie)
Umwandlung von Energie:
$\mathrm{d}E_{kin} = \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = -\mathrm{d}E_{pot}$

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = E_{kin}(\vec{r}_2) - E_{kin}(\vec{r}_1) = \Delta E_{kin}$$

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = E_{pot}(\vec{r}_1) - E_{pot}(\vec{r}_2) = -\Delta E_{pot}$$

Leistung: $P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\vec{v}$
Konservative Kraft:
$\vec{F}$ konservativ $\iff \oint\vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = 0$

$$\Longrightarrow W_{12} = \int_1^2\vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = E_{pot}(1) - E_{pot}(2)$$

Kraftfeld: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$

Gravitationskraft: $\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{mM}{r^2}\vec{e}_r = f(r)\vec{e}_r$

Hom. Kraftfeld: $\vec{F}(\vec{r}) = (0, 0, F_z)^T$ ist konservativ
Zentralkraftfeld: $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{e}_r$ ist konservativ
Potentielle Energie des Gravitationsfeldes:
$E_{pot}^{grav} = -G\frac{mM}{r}$
Im konservativem Kraftfeld:
$\vec{F} = -\vec{\nabla}E_{pot} = -\text{grad}E_{pot}$

$$= -\left(\frac{\partial E_{pot}}{\partial x}, \frac{\partial E_{pot}}{\partial y}, \frac{\partial E_{pot}}{\partial z}\right)$$

Potential: $\Phi(\vec{r}) = \lim_{m \to 0}\frac{E_{pot}(\vec{r})}{m}$

$E_{pot}(\vec{r}) = m\Phi(\vec{r})$
$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}E_{pot}(\vec{r}) = -m\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$

Gravitationspotential: $\Phi = -G\frac{M}{r}$

Gravitationsfeld: $\vec{G} = -G\frac{M}{r^2}\vec{e}_r$

Energieerhaltung (konservative Kraftfelder): $E_{pot} + E_{kin} = E_{ges} = \text{const}$

4 Systeme von Massenpunkten

Gesamtmasse: $M = \sum_{i=1}^{n}m_i$

Schwerpunkt:

$$\vec{r}_s = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{r}_i$$

$$\vec{r}_s = \frac{1}{M}\int_V\vec{r}\mathrm{d}m = \frac{1}{M}\int_V\vec{r}\rho(\vec{r})\mathrm{d}V$$

4.1 Bewegung des Schwerpunkts

Geschwindigkeit:

$$\vec{v}_s = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_s}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i$$

Schwerpunktimpuls:

$$\vec{p}_s = \sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i = M\vec{v}_s$$

Allgemeiner Impulssatz: $\dot{\vec{p}_s} = M\vec{a}_s = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$

System abgeschlossen $\iff \sum F_i = 0$

$$\Longrightarrow \vec{p}_s = \sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i = \text{const}$$

5 Stöße

Kollinearer, elastischer Stoß:

$$v_1' = \frac{v_1(m_1 - m_2) + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = \frac{v_2(m_2 - m_1) + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}$$

Geschwindigkeit im Schwerpunktsystem:

$$v_s = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_1^* = v_1 - v_s = \frac{m_2v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_2^* = v_2 - v_s = \frac{m_1v_2 - m_1v_1}{m_1 + m_2}$$

$$p_1^* = m_1v_1^* = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)$$

$$p_2^* = m_2v_2^* = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(v_2 - v_1)$$

$p_1^* = -p_2^*$
$p_1^{*\prime} = -p_1^*$
$p_2^{*\prime} = -p_2^*$
Inelastische Stöße: Umwandung der kinetischen Energie.
$E_{kin,1} + E_{kin,2} = E'_{kin,1} + E'_{kin,2} + Q$
$Q = 0$: elastischer Stoß
$Q < 0$: inelastischer Stoß
$Q > 0$: superelastischer Stoß

6 Mechanik des starren Körpers

Volumen: $V = \lim_{\Delta V_i \to 0}\sum\Delta V_i = \int\mathrm{d}V$

Masse: $M = \lim_{\Delta M_i \to 0}\sum\Delta M_i = \int\mathrm{d}m = \int\rho\vec{r}\mathrm{d}V$

Schwerpunkt: $\vec{r}_s = \frac{1}{M}\int\vec{r}\mathrm{d}m = \frac{1}{M}\int\vec{r}\rho(\vec{r})\mathrm{d}V$

Geschwindigkeit: $\vec{v}_i = \vec{v}_s + (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{si})$

6.1 Drehmoment und Kräftepaare

Hebelgesetz: $F_1l_1 = F_2l_2$
Drehmoment: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, M = r \cdot F$
Gesamter Drehmoment:
$\sum\vec{M}_i = \sum\vec{r}_i \times \vec{F}_i$
Wirkung von n Kräften an den Punkten $\vec{r}_i$:
Translation: $\vec{F} = \sum\vec{F}_i$
Rotation: $\vec{M} = \sum(\vec{r}_i - \vec{r}_s) \times \vec{F}_i$
Statisches Gleichgewicht:
$\vec{F} = \sum\vec{F}_i = 0, \vec{M} = \sum\vec{M}_i = 0$
Gleichgewicht im Schwerefeld: $(\vec{r} - \vec{r}_s) \times \vec{g} = 0$

6.2 Rotation und Trägheitsmoment

Kinetische Energie:
$E_{kin} = \frac{1}{2}m\vec{v}_s^2 + \frac{1}{2}\sum m_i\vec{v}_{si}^2$

Trägheitsmoment: $I = \int r_\perp^2\mathrm{d}m = \int r_\perp^2\rho(\vec{r})\mathrm{d}V$

Rotationsenergie: $E_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$
Dünner Stab: $I = \frac{1}{12}mL^2$
Zylinder: $I = \frac{1}{2}mR^2$
Dünner Hohlzylinder: $I = mR^2$
Kugel: $I = \frac{2}{5}mR^2$
Zylinderkoordinaten:
$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = z$
$\mathrm{d}V = r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}z$
Kugelkoordinaten:
$\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$
Steinerscher Satz: $I = I_s + r_{s\perp}^2 m$
Bewegungsgleichung (raumfeste Achse):
$M = I\dot{\omega} = I(\dot{v}/r) = I\alpha = I(v^2/r^2)$
Drehimpuls:
$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
$L = I\omega = I(v/r)$
$\dot{\vec{L}} = \vec{M}$

$$\vec{L} = \int\mathrm{d}\vec{L} = \int(\vec{r} \times \vec{v})\mathrm{d}m$$

Systeme von Massenpunkten:
$\vec{L} = \sum\vec{r}_i \times \vec{p}_i$

$\vec{M} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{L}^{\bullet}$
Ohne äußere Kraft: $\vec{M} = 0 \iff \vec{L} = \text{const}$

6.3 Deformierbare Körper

Hooksches Gesetz:
$\frac{F}{A} = \sigma = E\frac{\Delta L}{L} = E\varepsilon$
Querkontraktion: $\frac{\Delta D}{D} = -\mu\frac{\Delta L}{L}$
Volumenänderung:
$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L}(1-2\mu) = \frac{\sigma}{E}(1-2\mu)$
Kompression: $\frac{\Delta V}{V} = -\chi\Delta p$
Kompressibilität: $\chi = (3/E)(1-2\mu)$

6.3.1 Scherung und Torison

Normalspannung/Zugspannung: $\sigma = F_N/A$
Tangentialspannung/Scherspannung:
$\tau = F_T/A$
Kleine Scherwinkel: $\tau = G\alpha$
Torsion eines Drahtes:
$M = (\pi G R^4/2L)\varphi = K_D\varphi$
Torsionsschwingung eines Drahtes: $M = I\ddot{\varphi} = -K_D\varphi$

6.4 Hydrostatik

Druck: $p = F/A$ ist überall gleich!
Flüssigkeit $\Longrightarrow \chi = 0, V = \text{const}$
Hydrostatischer Druck: $p = p_0 + \rho g h$
Auftriebskraft: $F_A = g\rho V = gm$

6.5 Gase

Bei $T = const.$: $p_1/p_2 = \rho_1/\rho_2$ Boyle-Mariotte:
$T = \text{const} \Longrightarrow p \cdot V = \text{const}$
Barometrische Höhenformel:
$p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g}{p_0}h\right)$
$\rho(h) = \rho_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g}{p_0}h\right)$

6.6 Strömende Flüssigkeiten und Gase

Kontinuitätsgleichung: $A_1 v_1 = A_2 v_2$
Bernoullische Gleichung: $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{const}$
Newtonsches Reibungsgesetz: $\tau = \frac{F_R}{A} = \eta\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y}$
$F_R = \eta A\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y}$
η: dynamische Viskosität
Schubspannung an zylindrischer Oberfläche im Abstand r:
$\tau = \frac{F}{A} = \frac{\Delta p \pi r^2}{2\pi r L} = -\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$
Hagen-Poisouille: $\dot{V} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi\Delta p}{8\eta L}R^4$

7 Wärmelehre

Gesetz von Gay-Lussac: $V(T) = V_o(1+\gamma T)$
Längenausdehung: $\Delta L = \alpha L_0 \Delta T$
Volumenausdehung: $\Delta V = \gamma V_0 \Delta T$
α: Längenausdehungkoeffizient
$\gamma \approx 3\alpha$

7.1 Zustandsgleichung idealer Gase

Bolye-Mariotte-Gay-Lussac:
$p \cdot v \sim T, \frac{pV}{T} = \text{const}$
Zustandsgleichung idealer Gase:
$pV = nN_A k_B T$
$pV = nRT, R = k_B N_A$
n: Anzahl Mol
$N_A = 6.022 \cdot 10^{23}\text{mol}^{-1}$
$k_B = 1.381 \cdot 10^{-23}\text{J/K}$
$R = 8.31451\text{J/K mol}$

7.2 Kinetische Gastheorie

$p = \frac{1}{3}Nm\overline{v}^2$
$\bar{E}_{kin} = \frac{3}{2}k_B T$
Äquipartitionsprinzip: $\bar{E}_{„kin'“} = f\frac{1}{2}k_B T$
Innere Energie $U = nN_a\frac{1}{2}fk_B T = nR\frac{1}{2}fT$

7.3 Wärme, Wärmekapazität, latente Wärme

Wärmemenge: $Q = cm\Delta T$
$Q = c_m n\Delta T$
c: spezifische Wärmekapazität
c_m: spezifische Molwärme
latente Wärme: $Q = \lambda m$
λ: (latente) Schmelz-/Verdampfungswärme
Mechanisches Wärmeäquivalent: 1cal= 4.186J
1. Hauptsatz: $\Delta U = \Delta Q + \Delta W$

7.4 Volumenarbeit

Volumenarbeit: $W = -\int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V$
Isotherme Zustandsänderung: $T = \text{const}$
$\Delta U_{12} = 0$
$\Delta Q_{12} = nRT\ln V_2/V_1$
$\Delta W_{12} = -\Delta Q_{12}$
Isobar Zustandsänderung: $p = \text{const}$
$\Delta W_{12} = -p(V_2 - V_1) = -nR(T_2 - T_1)$
$\Delta Q_{12} = nc_p(T_2 - T_1)$
$\Delta U_{12} = \Delta U - \Delta W = n(c_p - R)(T_2 - T_1)$
$c_v = (f/2)R$
Isochore Zustandsänderung: $V = \text{const}$
$\Delta W_{12} = 0$
$\Delta Q_{12} = nc_V(T_2 - T_1)$
$\Delta U_{12} = \Delta Q_{12} = nc_V(T_2 - T_1)$
$c_p = ((f+2)/2)R, c_p = c_V + R$
Adiabatische Zustandsänderung: $Q = \text{const}$
$\mathrm{d}U = \mathrm{d}W$
$\mathrm{d}U = nc_V\mathrm{d}T$
$\mathrm{d}W = -nRT(\mathrm{d}V/V)$
Adiabatengleichungen:
$pV^\gamma = \text{const}$
$TV^{\gamma-1} = \text{const}$
$T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const}$
$\gamma = c_p/c_V = (f+2)/f$