1. **Definition Cauchy-Folge**
   $\forall\varepsilon > 0 \exists (N_\varepsilon \in \mathbb{N} : (\forall n, m > N : (|x_n - x_m| < \varepsilon)))$ (Genügend weit in die Folge hinein wird der Abstand zweier Folgeglieder voneinander beliebig klein)

2. **Kriterien Konvergenz von Folgen**

   (a) Standarddefinition für Konvergenz gegen den Wert x:
   $\forall\varepsilon > 0 \exists (N_\varepsilon \in \mathbb{N} : (|x_n - x| < \varepsilon) \forall n \geq N_\epsilon)$ (Der Abstand der Folgeglieder zum Grenzwert x wird kleiner als jede Schranke)

   (b) Quotientenkriterium: $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Longrightarrow$ Die Folge konvergiert. ???????????? richtig so?

   (c) Es gilt: Der Grenzwert ist eindeutig.

3. **Grenzwert bestimmen**
   ???????????

4. **Konvergenzradius von Potenzreihen bestimmen**
   Allgemeine Potenzreihe:
   $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ mit Konvergenzradius R, für $||z - z_0|| < R$ konvergiert die Reihe absolut.

   (a) Cauchy-Hadamard: $R = \begin{cases} 0 & |\limsup\limits_{n\longrightarrow\infty}(\sqrt[n]{|a_n|})| = \infty \\ \infty & \limsup\limits_{n\longrightarrow\infty}(\sqrt[n]{|a_n|}) = 0 \\ \frac{1}{\limsup\limits_{n\longrightarrow\infty}(\sqrt[n]{|a_n|})} & sonst \end{cases}$
   (funktioniert immer)

   (b) Vereinfachtes Cauchy-Hadamard: $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}(\sqrt[n]{|a_n|})}$
   (meistens gültig, gültig wenn $\limsup\limits_{n\longrightarrow\infty}(\sqrt[n]{|a_n|}) = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty}(\sqrt[n]{|a_n|})$)

   (c) Quotientenkriterium: $R = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$
   (funktioniert nur, wenn dieser Grenzwert auch existiert, muss nicht)

5. **Absolute Konvergenz:**
   Wurzelkriterium: $\limsup(\sqrt[n]{a_n}) < 1 \Longrightarrow$ Die Reihe konvergiert absolut

6. **Konvergenz von Reihen:**

   (a) Nullfolgenkriterium prüfen

   (b) Teleskopsumme anwenden

   (c) Summe bis unendlich in Grenzwert von Folge bis n überführen

   (d) Leibnitzkriterium?????

   (e) Majoranten-/Minorantenkriterium

7. **Geometrische Reihe**
   $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_0 q^k = \frac{a_0}{1-q}$; R = 1

8. **Sinus/-Cosinus-Reihe**
   $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{\infty}((-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!})$; $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{\infty}((-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!})$

9. **Exponentialreihe**
   $\exp\{x\} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty}(1 + \frac{x}{n})^n$

10. **Logarrithmische Reihe:** ???????

11. **Stetigkeit**
Polynome sind immer stetig
Lipschitzstetig $\Longrightarrow$ Gleichmäßig stetig $\Longrightarrow$ stetig

   (a) Kriterium Stetigkeit von Funktionen
   Eine Funktion ist stetig $\Leftrightarrow$ Grenzwert und Funktionswert sind vertauschbar $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x)) = f(\lim\limits_{n\to\infty}(x))$
   $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (Lösungsmöglichkeit: Stelle Definition mit eingesetzter Funktion so um, dass ein δ, welches immer existent sein muss, in Abhängigkeit von ε angegeben werden kann (oder anders herum...))

   (b) Kriterium für eine stetige Fortsetzung (6.6)
   $D \subset X$ bel. Teilmenge $F : D \longrightarrow Y$ hat eine stetige Fortsetzung in $x_0 \in X \Longleftrightarrow$
   $\exists \bar{F} : D \cup \{x_0\} \longrightarrow Y$ welche in x_0 stetig ist und aud $D\backslash\{x_0\}$ mit F übereinstimmt

   (c) Gleichmäßige Stetigkeit von Funktionen
      i. Definition
      $\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$ (Für jede kleine senkrechte Rechteckseite ε kann man eine hinreichend kleine waagrechte Rechteckseite δ finden, sodass, wenn man das Rechteck auf dem Funktionsgraphen entlangführt, letzterer immer nur die senkrechten Rechtecksseiten schneidet)
      ii. Satz von Heine
      Ist eine Funktion in einem kompakten Intervall [a,b] stetig, so ist sie dort sogar gleichmäßig stetig.

   (d) Lipschitz-Stetigkeit von Funktionen (6.1)
   Für $(X, d_X) \wedge (Y, d_Y)$
   $F : X \longrightarrow Y$Lipschitz-stetig $\Longleftrightarrow \exists L \geq 0 : \forall x_1, x_2 \in X :$
   $d_y(F(x_1), F(x_2)) \leq L \cdot d_X(x_1, x_2)$ (Der Betrag der Steigung des Graphen ist immer kleiner als eine endliche Konstante L)

12. **Stetigkeitsbereich berechnen**
Folgenkriterium: Ist stetig genau dann wenn Grenzwerte von Funktionen vertauschbar $\Longleftrightarrow$?????

13. **Der Zwischenwertsatz**

   (a) Def.
   $[a, b]$ Intervall und $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. $\Longrightarrow \forall t \in [0, 1] \exists c \in [a, b] :$
   $f(c) = tf(a) + (1 - t)f(b) =: f_t$

   (b) Intuition
   Die Fkt. nimmt alle Werte zwischen f(a) und f(b) (mindestens einmal) an.

14. **Kriterien Norm**
Eine Norm ist eine Abbildung $|| \cdot || : V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit den Eigenschaften:

   - Homogenität: $||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v||; \lambda \in \mathbb{R}, v \in V$
   - Positivität: $||v|| > 0 \forall v \neq 0_V$
   - Dreiecksungleichung: $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||; v, w \in V$

15. **Matrix- oder Operatornorm bestimmen (4.47)**

   (a) Definition
   Eine Norm auf dem Vektorraum $Hom_{\mathbb{R}}(V, W)$
   $\|A\|_{V,W} := \sup \|Ax\|_W | \|x\|_V = 1$
   $\|Ax\|_W \leq \|A\|_{V,W} \cdot \|x\|_V \; \forall x \in V$

   (b) Intuition
   Anschaulich misst die Op.norm ”den max. Streckungsfaktor” einer lin. Abbildung.

16. **Kriterien Metrik**
Eine Metrik ist eine Abbildung $d(\cdot, \cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit den Eigenschaften:

   - Symmetrie: $d(v, w) = d(w, v); v, w \in V$

- Positivität: $d(v, w) = 0 \Leftrightarrow v = w$
- Dreiecksungleichung: $d(v, w) \leq d(v, z) + d(z, w); x, y, z \in V$

17. **Metrischer Raum**
Ein metrischer Raum ist eine Menge, auf der eine Metrik definiert ist.

18. **Kriterien Vollständigkeit eines Raumes**
Ein metr. Raum ist **vollständig**, wenn in ihm jede Cauchy-Folge konvergiert $\Longleftrightarrow (|a_{N_\varepsilon} - a_{N_\varepsilon+1}| < \varepsilon \Longrightarrow \exists x : (|x_n - x| < \delta))$

    Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt ein **Banach-Raum**.

    (a) Beispiele: In $\mathbb{R}^n$ konvergiert jede Cauchy-Folge

19. **Kriterien Offenheit, Abgeschlossenheit**

    (a) Offene Teilmenge
    U heißt **offen**,wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist, d.h. $\forall x \in$ U ein $\varepsilon > 0$ existiert, s.d.$B(x, \varepsilon) \subset U$

    (b) Abgeschlossene Teilmenge
    Eine Teilmenge A eines metr. Raumes X ist **abgeschlossen**, falls ihr Komplement $X \backslash A$ offen ist $\Leftrightarrow$ Für jede Folge deren Glieder in A liegen der Grenzwert in A liegt.

    (c) Beispiele
    i. $\emptyset$ und X sind offen.
    ii. In jedem metr. Raum sind $\emptyset$ und X auch abgeschlossen, da ihre Komplemente $\emptyset$ und X offen sind.

20. **Beschränktheit**
Eine Menge X heißt nach oben (unten) beschränkt, wenn es eine obere (untere) Schranke s gibt, sodass $\forall x \in X : x \geq (\leq) s$. Eine nach oben und unten beschränkte Menge heißt beschränkt.

21. **Kompaktheit**
Eine Teilmenge des euklidischen Raums heißt Kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

22. **Folgenkompaktheit**
Ein Raum heißt folgenkompakt, wenn jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt.

    Metrische Räume sind folgenkompakt $\Leftrightarrow$ sie kompakt sind.

23. **Konvexität/Konkavität**

    (a) Konvexität:
    f(x) konvex $\Leftrightarrow f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x) + (1-t)f(x) \forall t \in (0,1) \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ (letzteres funktioniert nur wenn f stetig und 2mal difbar.) Konvexe Funktionen auf offenen Intervallen sind stetig (9.10).

    (b) Konkavität:
    f(x) konkav $\Leftrightarrow f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x) + (1-t)f(x) \forall t \in (0,1) \Leftrightarrow f''(x) \leq 0$ (letzteres funktioniert nur wenn f stetig und 2mal difbar.)

24. **Kriterien punktweise Konvergenz von Funktionenfolgen**
Die Funktionenfolge $f_n(x)$ konvergiert punktweise gegen die Funktion $f(x) \Leftrightarrow \forall x : \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} (f_n(x)) = f(x)$

25. **Kriterien gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen**
Die Funktionenfolge $f_n(x)$ konvergiert punktweise gegen die Funktion $f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} (\sup\limits_{x \in X} (f_n(x) - f(x))) = 0$

26. **Gradienten bilden**

$$grad(f(x_1, x_2, ..., x_n)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

27. **Richtungsableitung**
$D_{\vec{v}}f =< grad(f), \vec{v} >$

28. **Differenzenquotient an der Stelle x_0**
$\lim\limits_{x \longrightarrow x_0}(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0})$; Oder alternativ manchmal gültig: $\lim\limits_{h \longrightarrow 0}(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h})$

29. **Kriterien Differenzierbarkeit**
Eine Funktion ist differenzierbar an der Stelle x, wenn an der Stelle x der Differenzenquotient der Funktion existiert.
Polynome sind immer Differenzierbar/Funktionen die nur Polynome in den Komponenten haben.

30. **Jacobi-Matrix aufstellen**
$$J_f(a) := (\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{i=1,...,m;j=1,...,n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$
Wenn die Funktion total Differenzierbar ist, ist die von der Jacobi-Matrix induzierte Abbildung die Ableitung. ($= Df(x)$?????)

31. **Hesse-Matrix aufstellen**
$$H_f(x) := (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x))_{i,j=1,...,n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \dots & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

32. **Eigenwert bestimmen**
Eigenwerte einer Matrix A (Oder ihrer induzierten linearen Abbildung) sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi = det(A - \not{\Vdash}\lambda)$, also $0 = det(A - \not{\Vdash}\lambda)$

33. **Maxima/Minima mehrdimensionaler Funktionen bestimmen**
    (a) Gradienten bilden
    (b) Nullstellen des Gradienten bestimmen
    (c) Hesse-Matrix bilden
    (d) Hesse-Matrix an Nullstellen überprüfen
        i. Negativ-Definit ⇔ Alle Eigenwerte $<$ 0 $\Longrightarrow$ Maximum
        ii. Positiv-Definit ⇔ Alle Eigenwerte $>$ 0 $\Longrightarrow$ Minimum
        iii. Semidefinit oder nicht definit $\Longrightarrow$ Kriterium versagt

34. **Der Mittelwertsatz(9.8)**
$[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, und auf (a, b) diffbar. $\Longrightarrow \exists \xi \in (a, b) : f(b) = f(a)+(b-a)f'(\xi)$

35. **Legendre-Transformation**
$f_{(x)} \longrightarrow f^*_{(u)}$:
Definition: $f^*_{(u)} = \sup\limits_{x \in X}(ux - f_{(x)})$
Bei Differenzierbaren äquivalent:
$f^*_{(u)} = ux_{(u)} - f_{(x_{(u)})} = uf^{-1}{}_{(u)} - f_{(f^{-1}{}_{(u)})}$
Intuition:
Die Funktion wird durch die Menge ihrer einhüllenden Tangenten beschrieben.

36. **Kriterien Existenz einer Umkehrfunktion**
    (a) Damit die Umkehrfunktion einer Funktion eingeschränkt auf die Menge X existiert, muss die Funktion auf X bijektiv sein. Krietrien Bijektivität:
        - f ist injektiv auf X ⇔ f ist streng monoton auf X ⇔ $(f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y)$
        - f ist surjektiv ⇔ $\forall y \in \mathbb{R} \exists x \in X : f(x) = y$

(b) Satz von der Umkehrabbildung:
Totales Differential umkehrbar und stetig ⇔ Die Jacobi-Matrix Df(a) mit $a \in A$ ist invertierbar ⇔ $det(Df(a)) \neq 0$ ⇔ Die Funktion ist ein Diffeomorphismus $\Longrightarrow$ Die Funktion lässt sich auf A einschränken, sodass Umkehrfunktion zu finden ist

37. **Kriterien Diffeomorphismus (10.10)**
$U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diffbar derart, dass $V := F(U)$ offen und $\exists$ eine diffbare Abb. $G : V \longrightarrow \mathbb{R}^m : G \circ F = id_U$ und $F \circ G = id_V \Longrightarrow \forall x_0 \in U$ mit $y_0 = F(x_0)$:
$DG(y_0) = DF(x_0)^{-1}$ Eine solche Abb. F heißt Diffeomorphismus

38. **Banachscher Fixpunktsatz(4.29)**
   (a) Definition
   $T : X \longrightarrow X$ heißt **kontraktiv** oder eine **Kontraktion** $\Longleftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq c < 1$ s.d.
   $d(T(x), T(y)) \leq c \cdot d(x, y) \forall x, y \in X$
   (b) Eine Kontraktion auf einem nicht-leeren und vollständigen metrischen Raum besitzt genau einen Fixpunkt d.h. $\exists! x_\infty \in X : T(x_\infty) = x_\infty$

39. **Kriterien totale Differenzierbarkeit**
Polynome sind immer total differenzierbar.

Ist eine FUnktion total differenzierbar, dann ist ihre Totale Ableitung Df(a) die von der Jacobi-Matrix induzierte Abbildung.

40. **Implizites Diffenrenzieren**
$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ (Folgt direkt aus Kettenregel)

41. **Integralrechenregeln**
   (a) Linearität ¡- Brauchen wir das??????
   (b) Richtungsumkehrung ¡- Brauchen wir das??????
   (c) Partielle Integration
   $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$
   (d) Substitution
   $\int f(g(x))dx = \int f(u)(\frac{1}{(\frac{du}{dx})})du$
   Variable Substituieren, Infinitesimales Element neu ausrechnen und einsetzen
   (e) Uneigentliche Integrale (14.33)
   $$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(s)ds = \lim_{a \downarrow \alpha} \int\limits_{a}^{t_0} f(s)ds + \lim_{b \uparrow \beta} \int\limits_{t_0}^{b} f(s)ds$$
   (f) Majorantenkriterium für Integrale nicht negativer Funktionen
   Gilt $0 \leq f(x) \leq h(x) \forall x \in I$ und existiert $\int\limits_I h(x)dx$, so existiert auch $\int\limits_I f(x)dx$, und es gilt $\int\limits_I f(x)dx \leq \int\limits_I h(x)dx.$

42. **Differentialgleichungen:**
Wenn in weiterer Teilaufgabe alles nichts hilft, versuchen das Ergebnis der letzen Teilaufgabe zu verwenden

LASS UNS AUCH IMMER DIE NUMMER DER KRITERIEN HINZUFÜGEN FALLS WIR IN DER KLAUSUR UNS AUF DIE JEWEILIGEN NUMMERN BEZIEHEN MÜSSEN

Leibnitzkriterium?

Konvexität/Konkavität von Mengen? ————GUTE IDEE————

Klausur: Blatt 12 ist wichtig Es wird auf jeden Fall die Ableitung irgend einer Umkehrfunktion drankommen Keine Gleichmäßigkeit DGL können kommen Siehe auch Blatt 11 von 2008, auf Studoku zu haben MATRIXNORMEN/OPERATORNORM/METRISCHER RAUM DER MATRIZEN KOMMT DRAN Am besten noch einmal Reihenkonvergenz mit verschiedenen Exponenenten (e. g. 2^k Wiederholen) KEINE KRUMMLINIGEN KOORDINATEN

Nach Walcher: §1: R, ¿, Vollständigkeit §2: Folgen §4: Normierte Vektorräume -¿ Basisunabhändiges Differenzieren §5: Reihen §10,§12 auch relevant ES KOMMT NICHTS ZU KOMPAKTHEIT Supremumsnorm auf Funktionen ist wichtig Gleichmäßigkeit: Keine Beweise dazu, aber anwenden können: Grenzprozesse dürfen wahrscheinlich alle vertauscht werden (Gleichmäßigkeit -¿ Grenzprozesse Vertauschbar) Fragen nach Differenzierbarkeit beantworten mit: Es ist ein Polynom/Es existieren partielle Ableitungen

Vermutlich Koordinaten...

Moritz Altklausur Themen: Normierte Vektorräume Folgen und Stetigkeit Totales Differential und Unmkehrabbildung Differentialgleichung Komplexe Integration (FÄLLT BEI UNS WEG)