1 Funktionentheorie/Komplexe Differentiation

Kriterien Offenheit, Abgeschlossenheit

1. Offene Teilmenge
   U heißt **offen**,wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist, d.h. $\forall x \in$ U ein $\varepsilon > 0$ existiert, s.d.$B(x, \varepsilon) \subset U$

1.1 Holomorphie

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph.
Definition Holomorphie auf U: "In jeder Stelle von U komplex difbar"
Holomorph auf U $\Leftrightarrow$ Cauchy-Riemann-DGL auf U erfüllt

1.2 Cauchy-Riemann-DGL

CRDGL kartesisch: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$
CRDGL Polarkoordinaten: $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \phi}; \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \phi}$
Wirtinger-Ableitung: $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$ und $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$

Ableitung kartesisch (Mit $z = (x, y); f_{(z)} = (u, v)$):
$f'_{(z)} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$
Ableitung Kugelkoordinaten:
Determinante:
$det(Df) = |f'|^2$

1.3 Analytische Funktionen

Definition analytische Funktion: "Durch Potenzreihe Darstellbar"
Analytisch $\Leftrightarrow$ Holomorph

1.4 Komplexe Integrierbarkeit

- Allgemeine komplexe Integralformel: $\int_a^b f_{(w)}dw = (b-a)\int_0^1 f_{(a+t(b-a))}dt$
- Additivität von Integralen nicht mehr gegeben, außer Punkte kolinear
- Zyklisch/Antizyklisch: $\left(\int_a^b + \int_b^c + \int_c^a\right) f_{(w)}dw = \int_{\triangle(a,b,c)} f_{(w)}dw = \int_{\triangle(c,a,b)} f_{(w)}dw = -\int_{\triangle(a,c,b)} f_{(w)}dw$
- f holmorph und besitzt Stammfkt $\Leftrightarrow$ Geschl. Int. $= 0 \Leftrightarrow$ f holomorph
- Für konvexe Defbereiche: f holomorph $\Rightarrow$ f besitzt komplexe Stammfunktion
- Parametrisierungsunabhängig, invariant unter stetigen Deformationen des Weges in holomorphen Funktionsbereichen
- Def. Kurvenintegral über γ: $\int_\gamma f_{(w)} = \int_\alpha^\beta f_{(\gamma_{(t)})} \cdot \dot{\gamma}_{(t)}dt$ (mit $\gamma_{(\alpha)} = a$; $\gamma_{(\beta)} = b$) Standardabschätzung:
  Zerfall in gewöhnliches Integral:
  Ist $\gamma = [\alpha, \beta] \in R \in C$, so wird integriert wie ein gewöhnliches Integral einer komplexwertigen Funktion
- Berechne bestimmten Wert in Kreis durch gewichtetes Kurvenintegral über Kreisrand: $f_{(x)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R^+(z_0)} \underbrace{\frac{f_{(w)}}{w - z}}_{\text{Holomorph auf } U\setminus\{z\}} dw$

1.5 Laurentreihen

Allgemeine Formel: $f_{(z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$
Berechnung von a_n-Glied: $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho^+(z_0)} \frac{f_{(w)}}{(z - z_0)^{n+1}}dw$ mit ρ als Radius im Kreisring
Hauptteil der Laurentreihe:
Alle Exponenten größer gleich null
Nebenteil der Laurentreihe:

Alle Exponenten kleiner Null
Residuum an einer Polstelle:
$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho^+(z_0)} f_{(w)}dw$
Und für Pol der Ordnung k:
$= \lim\limits_{z\to z_0}\left(\frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1} f_{(z)}(z-z_0)^k\right)$ $\to$ Koeffizient a_{-k} der Laurentreihe, Koeffizient bei z^{-k}
Für Polstelle erster Ordnung:
$Res_z f_{(x)} = \lim\limits_{z\longrightarrow z_0}(z-z_0)f(z)$

1.6 Residuensatz

Residuensatz: $\oint f_{(w)}dw = 2\pi i\sum\limits_{i=1}^{n} Res_{z_i}(f)\cdot w_{z_i}$ (Für f meromorph, γ positiv orientiert und geschlossen, w ist Windungszahl)
Trichotomie:

- Verschwindender Hauptteil: Hebbare Singulatrität...
- Endlicher Hauptteil: Pol der Ordnung K...
- Unendlicher Hauptteil: Wesentliche Singularität...

Meromorphe Funktionen:
Funktion die holomorph bis auf isolierte Polstellen ist, sie lässt sich durch eine Laurent-Reihe an jedem Punkt darstellen.
Polstelle finden:
Nenner gleich null setzen, auflösen (In seltenen Fällen ergibt sich auch hebbare Sing. (zb. sin(x)/x)
Für Polstelle erster Ordnung:
$Res_z f_{(x)} = \lim\limits_{z\longrightarrow z_0}(z-z_0)f(z)$ (Häufig hilft hier L'Hospital!)

1.7 L'Hospital

Wenn der Limes von einem Bruch gebildet werden soll, und dieser nach Einsetzen der Grenzwerte zu $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ wird, so dürfen Zähler und Nenner separat füreinander abgeleitet werden, und dann der Grenzwert gebildet, dieser ist dann gleich dem ursprünglichen Grenzwert

2 Symmetrien

Vektorraum der Abbildungen mit endlichem Träger:
$\mathrm{supp}(f) := \{x \in A \mid f(x) \neq 0\}$

$\mathcal{F}^{fin}(M,K) = \{f : M \longrightarrow K||supp| < \infty\}$
$= \{f : M \longrightarrow K|f(m) = 0 \quad \text{für fast alle m}\}$
Wenn V ein K-VR mit Basis B, dann gilt
$V \cong \mathcal{F}^{fin}(B,K)$
W hat die Basis C somit gilt
$V \otimes W = \mathcal{F}^{fin}(B \times C, K)$
$V \oplus W = \mathcal{F}^{fin}(B \dot{\bigcup} C, K)$

2.1 Multilineare Algebra

Körperaxiome:
Menge mit Nullelement, Einselement Addition, Skalarmultilikation, Assoziativität, beidseitige Distributivität?????????

Freier Vektorraum:
Faktorräume:
$[v_1] + [v_2] = [v_1 + v_2]$
$\lambda[v_1] = [\lambda v_1]$

Direkte Summe:
$\dim(A \oplus B) = \dim(A) + \dim(B)$
$\mathrm{tr}(A \oplus B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$
$\det(A \oplus B) = \det(A) \cdot \det(B)$
Direkte Summe von A und B = Blockmatrix von A und B
$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$

Tensorprodukt:
$\dim(A \otimes B) = \dim(A) \cdot \dim(B)$
$\mathrm{tr}(A \otimes B) = \mathrm{tr}(A) \cdot \mathrm{tr}(B)$
$\det(A \otimes B) = (\det(A))^{\dim(V)} \cdot (\det(B))^{\dim(W)}$
mit $A \in End_m(V)$ und $B \in End_n(W)$

$A \otimes \tilde{A}(v \otimes w) = A(v) \otimes \tilde{A}(w)$
$A \oplus \tilde{A}(v \oplus w) = A(v) \oplus \tilde{A}(w)$
Kroenecker-Produkt:
Tensorprodukt von A und B = Kroneckerprodukt von A und B
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes A = \begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix}$ Mit aA usw. sind jeweils die Blockmatrizen.
Faktorisierbare Tensoren:
$T \in V \otimes W$ faktorisierbar $\Longleftrightarrow \exists v \in V, w \in W$ s.d. $T = v \otimes w$
$\Longleftrightarrow rkT = 1$ als Matrix.
Das Dach-Produkt:

$\lambda_1 \wedge ... \wedge \lambda_k = \sum_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma)\lambda_{\sigma(1)} ... \otimes \lambda_{\sigma(k)}$

2.2 Gruppen und Darstellungstheorie

2.2.1 Gruppe

Definition:
Menge mit Verknüfung, neutralem Element und Assoziativität
Abelsch, wenn kommutativ
Gruppenhomomorphismus $\phi: \quad \phi(g_1 \circ g_2) = \phi(g_1) \cdot \phi(g_2)$
Normalteiler:
$H \subset G$ ist Normalteiler wenn $\forall h \in H, g \in G$ gilt $ghg^{-1} \in H$

2.2.2 Darstellungen

Eine Darstellung ist ein Homomorphismus $\quad \rho : G \longrightarrow GL(V)$.
Irreduzibel heißt eine Darstellung, wenn sie keine nicht-trivialen Unterdarstellungen besitzt.

Eine **Unterdarstellung** von einer Darstellung f ist ein Untervektorraum $W \subset V$ mit der Eigenschaft...TODOOOO

Invarianter Unterraum von V unter T...
... ist ein Unterraum von V, aus dem jedes Element unter Anwendung von T

nur in V abgebildet wird.

Standard inneres Produkt:
Alle Einträge an gleichenstellen multiplizieren und Produkte Summieren

Schur'sches Lemma:
S^1 ist abelsche Gruppe $\Rightarrow$ Alle irreduziblen Darstellungen von dieser Gruppe sind eindimensional.

Relevante Gruppen und deren Darstellungen:

1. **Die Symmetrische Gruppe** S_n (ab $n \geq 3$ nicht abelsch)
   Gruppe der Permutationen der n-elementigen Menge. Wird erzeugt von Transpositionen (Vertauschung von zwei Elementen) Darstellungsmatritzen sind die Permutationsmatritzen.

2. **Die Diedergruppe** D_n (ab $n \geq 3$ nicht abelsch)

   2Dim. Drehungn τ und Spiegelgn σ, mit $\tau_1^n = id = \sigma^2$. Drehmatrizen:
   $\tau_k = \begin{pmatrix} cos(k\frac{2\pi}{n}) & -sin(k\frac{2\pi}{n}) \\ sin(k\frac{2\pi}{n}) & cos(k\frac{2\pi}{n}) \end{pmatrix}; \sigma_k = \begin{pmatrix} cos(k\frac{2\pi}{n}) & sin(k\frac{2\pi}{n}) \\ sin(k\frac{2\pi}{n}) & -cos(k\frac{2\pi}{n}) \end{pmatrix}$

3. **Die zyklische Gruppe** C_n (endlich, abelsch)
   Erzeugt von einem Element r, wobei $r^n = id$. Darstellungsmatritzen: $r_k = (e^{ik\frac{2\pi}{n}})$

4. **Die kontinuierliche Gruppe** $GL(n, \mathbb{R})$

3 Integrationstheorie

3.1 Transformationsformel

Substitutionsregel (Eindimensional):

Für Integral von a nach b gilt: $J \xrightarrow{\tau} I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ dann $\int\limits_{\tau(\alpha)}^{\tau(\beta)} f_{(s)}ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f_{(\tau_{(\sigma)})}\tau'_{(\sigma)}d\sigma$

Transformationssatz (Beliebige Koordinatentrafo):
Sei Υ offen und $\Phi : \Upsilon \longrightarrow U$ ein Diffeomorphismus, dann gilt:

$$\int\limits_{\Phi(\Upsilon)} f(x)dy = \int\limits_{\Upsilon} f(\Phi_{(\xi)}) \cdot \left|det(D\Phi_{(\xi)})\right| d\xi$$

$D\Phi(\xi)$ muss an jedem Punkt $\xi \in \Upsilon$ invertierbar sein.
Ein Diffeomorphismus ist eine bijektiv stetig diffbaren Fkt, deren Ableitung auch stetig diffbar ist.

3.2 Gaußscher Integralsatz

3.3 Differentialformen

3.3.1 Beispiele:

Wedgeprodukt:
$dx \wedge dx = 0$; $a \wedge dx = adx$; $(adx + bdy) \wedge dz = adx \wedge dz + bdy \wedge dz$
Seien $\omega \in \Omega^p$ und $\eta \in \Omega^q$ dann
$\omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega$
Cartanableitung:
$df = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$
$d(f_{(x,y,z)}) = (\frac{\partial f_{(x,y,z)}}{\partial x} \wedge dx) + (\frac{\partial f_{(x,y,z)}}{\partial y} \wedge dy) + (\frac{\partial f_{(x,y,z)}}{\partial z} \wedge dz)$
$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{k_1} \omega_1 \wedge d\omega_2$
mit k_1 als Grad der Form ω_1
Pullback:
$\omega = ydx$; $\psi_{(t)} = \begin{pmatrix} cos(t) \\ sin(t) \end{pmatrix} \Longrightarrow \psi^*_{(\omega)} = sin(t)d(cos(t))$ ("Substitution einsetzen")
Eigenschaften vom Pullback:

- $\psi^*(\omega)$ linear in ω
- $\psi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \psi^*(\omega_1) \wedge \psi^*(\omega_2)$
- $d(\psi^*(\omega)) = \psi^*(d(\omega))$

3.3.2 Identitäten:

Satz von Stokes:

$$\int\limits_M d\omega = \int\limits_{\partial M} \omega$$

3.4 Lebesque-Maße

$$vol(X) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_X(x)dx$$

3.5 Hilberträume $\mathcal{H}$

Ein Hilbertraum ist ein vollständiger unitärer Raum.

($\mathcal{H}$ ist ein Vektorraum über dem Körper der reellen oder komplexen Zahlen, mit **Skalarprodukt**, der **vollständig** bezüglich der vom Skalarprodukt induzierten Norm (des Längenbegriffs) ist)

Für eine Sesquilinearform gilt: $\langle u, \lambda v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$ und $\langle \lambda u, v\rangle = \bar{\lambda}\langle u, v\rangle$

3.6 Normen

L-1-Norm: $||f(x)||_{L1} := \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|dx$

L-2-Norm: $||f(x)||_{L2} := \sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx}$

Supremumsnorm/∞-Norm: $||f(x)||_\infty := sup(||f(x)||)$
Damit die Funktionenfolge in einer Norm konvergiert, muss der Grenzwert dieser Norm der Funktionenfolg gleich dem Grenzwert der normalen Punktweisen konvergenz sein.

Lemma: Sei $(f_n)_{n \in N}$ eine Funktionenfolge, die sowohl punktweise fast überall (bis auf eine Nullmenge) als auch in der L^1- oder L^2- oder Supremumsnorm konvergiert. Dann stimmen die Limiten fast überall überein

Gram-Schmidt-Orthogonalisierung:

$\tilde{b_n} = v_n - \sum\limits_{j=1}^{n-1} \langle v_n, b_j \rangle b_j$

Nehme f_1, f_2 Basisvektoren, dann bilde aus f_1 zu f_2 orthogonalen Basisvektor $\tilde{f_1}$ durch:

$\tilde{f_1} = f_1 - \frac{\langle f_1; f_2 \rangle}{\langle f_2; f_2 \rangle} f_2$

Dann noch normieren.

Wiederhole für jedes nötige Paar an Vektoren.

4 Sonstiges

Jacobi-Matrix aufstellen

$$J_f(a) := (\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Wenn die Funktion total Differenzierbar ist, ist die von der Jacobi-Matrix induzierte Abbildung die Ableitung. ($= Df(x)$?????)

Hesse-Matrix aufstellen

$$H_f(x) := (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x))_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \dots & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Volumen und Oberfläche der Einheitskugel				
Dimension	**Volumen**		**Oberfläche**	
0	1	1	0	0
1	2	2	2	2
2	π	3,141	2π	6,283
3	$\frac{4}{3}\pi$	4,189	4π	12,57
4	$\frac{1}{2}\pi^2$	4,935	$2\pi^2$	19,74

HöMa 3 Lösungen Übersicht:

Blatt 1:
1) Potenzreihen
2) Polare Cauchy-Riemann-Gleichungen
3) Holomorphie und komplexe Ableitung gleich Null
4) Holomorphie zeigen, Potenzreihenentwicklung, Konvergenzradius

Blatt 2:
1) Wirtingerkalkül, Komplexe Differenzierbarkeit
2) Hyperbolische Koordinaten, Holomorphie zeigen
3) (Komplexe) Kurvenintegrale (Generelle Berechnungen)
4) (Komplexe) Kurvenintegrale (Spezieller Beweis)

Blatt 3:
1) Wesentliche Singularitäten
2) Laurentreihen und Bernoullizahlen
3) Komplexe Hesse-Matrix, kritischer Punkt, Sattelpunkt im komplexen
4) Integration durch verschiebung der Kontur in die Komplexe Ebene (Wahrscheinlich nicht in der Klausur)

Blatt 4:
1) Singularitäten bestimmen, Residuen bestimmen, Integrieren mithilfe von Residuensatz
2) Singularitäten bestimmen, Residuen berechnen, Grenzwert mithilfe von Residuensatz
3) Hyperkomplexe Zahlen, Quaternionen, Norm beweisen
4) Quotientenraum, Projektion

Blatt 5:
1) Tensorprodukt, Abbildungen mit endlichem Träger
2) Tensorprodukt und direkte Summe, Spur und Determinante
3) Beweise zu Tensorprodukten, Verhalten des Tensorprodukts
4) Quaternionen, Gruppe zeigen, Untergruppe zeigen, Normalteiler

Blatt 6:
1) Darstellung zeigen, invarianter Unterraum, invariantes Komplement
2) Gruppe zeigen, normale Untergruppe zeigen, zeigen dass kein Normalteiler
3) Tensor Darstellungen irreduzibel
4) Permutationen, Symmetrische Gruppe, Diedergruppe (Dreieck drehen), Darstellungsmatrix bestimmen (in verschiedenen Basen), Irreduzibilität, Diagonalisierung

Blatt 7: WEIHNACHTSBLATT Mars etc.
1) Symmetriegruppe, invariante Unterräume, symmetrische-antisymmetrische Anteile, Diagonalisierung der Zerlegung
2) Infinitesimale Erzeuger, Basis einer Gruppe, Isomorphismus zwischen Gruppen
3) Element GL(n)/SO(n) zeigen, komplementärer Unterraum, Invarianten Unterraum finden
4) Tensorprodukte, Diedergruppe, S3

Blatt 8:
1) Kompaktheit, konvergente Teilfolgen
2) Transformationssatz, Koordinatentransformation, Funktionaldeterminanten
3) Integrale durch Koordinatentransformation, Integrale über Flächen
4) Norm, Abstandsfunktion, Dreiecksungleichung

Blatt 9:
1) Integral über Ellipse, Euklidisches Volumen, Flächeninhalt,
2) (Einheits-) Kugelvolumen (Rekursionsformeln)
3) Transformation, Funktionaldeterminante, Jacobidterminante
4) Dachprodukt/Wedgeprodukt, Hodge-Operator(?), Iota

Blatt 10:
1) Pullback/Rückzug durch Substitution oder Cartanableitung
2) Cartanableitung, Satz von Stokes, Prametrisierung, Integral über Differentialform
3) Untermannigfaltigkeit zeigen
4) Entropie, Thermodynamik, Zustandsgleichung

Blatt 11:
1) Laplace-Operator, Dirichlet-Randbedingungen, Neumann-Randbedingungen
2) Archimedisches Prinzip
3) Hermitesches inneres Produkt, Hilbertraumbasis
4) Polynome, verallgemeinerte Leibnitz-Formel, inneres Produkt, Orthonormalität von Polynomen

Blatt 12:
1) Konvergenz von Funktionenfolgen, L1-/L2-Normen
2) Vollständigkeit von Raum, Bestimmen ob Hilbertraum
3) Parallelogramidentität, von Skalarprodukt induzierte Norm, Hilbertraum widerlegen
4) l2 (Quadratsummierbare Folgen)
5) Darstellungen auf L2, Darstellung zeigen, invariante Unterräume
6) Tensorprodukt, Basis von Tensorprodukt aufstellen
7) Torus/Rotation parametrisieren, Differentialformen, Satz von Stokes