1 Systeme mit Nebenbedingungen:

1.1 Freiheitsgrade

Nebenbedingungen/Zwangsbedingungen: Anzahl der Freiheitsgrade einschränken
holonome ZB:
$f_i(\vec{x}_1,...,\vec{x}_N,t)=0,\ 1\le i\le r$
rheonom $\equiv$ zeitabhängig
skleronom $\equiv$ zeitunabhängig
$F=3N-r$ (F: Anzahl der FG, r: ZB, N MP)

1.2 Das d'Alembert'sche Prinzip

Virtuelle Verrückungen leisten keine Arbeit aus dem GG
$\delta A=(\vec{F}-\dot{\vec{p}}+\vec{Z})\cdot\delta\vec{x}=0$

1.3 Lagrange-Multiplikatoren:

$\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum\limits_{k=1}^{r}\lambda_k\frac{\partial g_k}{\partial x_i}=0,(1\le i\le N)$

1.4 Lagrange-Gleichungen 1. Art:

$m\ddot{\vec{x}}=\vec{F}+\sum\limits_j\vec{Z}_j=\vec{F}+\sum\limits_j\vec{\nabla}\vec{f}_j$
(mit Zwangskraft $\vec{Z}_j=\lambda_j\vec{\nabla}f$)
$F_i-m_i\ddot{x_i}+\sum\limits_{j=1}^{r}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial x_i}=0,$
$(r+1\le i\le 3N)$

2 Lagrange-Formalismus:

2.1 Lagrange-Gleichungen 2. Art:

$\mathcal{L}=T-V$
$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}=0\ (1\le q_i\le f)$

2.1.1 Allgemeiner Algorithmus

1)Freiheitsgrade abzählen
2)Freiheitsgrade durch veral. Koord.
3)Lagrange Fkt. durch veral. Koord. ausdrücken

2.2 Nicht-konservative Systeme

Lag-Glg:
$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j;Q_j=-\frac{\partial V}{\partial q_j}$
$\delta A_e=\sum\limits_{j=1}^{f}Q_j\cdot\delta q_j$
$Q_j=\sum\limits_{i=1}^{3N}F_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$
Extremalprinzip für nicht-kons. Sys.:
$\int\limits_{t_0}^{t_1}dt(\delta T+\delta A_e)=0$

3 Extremalprinzipien

3.1 Hamilton-Funktion

$\mathcal{H}=\sum\limits_{i=1}^{n}\dot{q}_ip_i-\mathcal{L}=T+V$
$\dot{q}_ip_i=2T;\ p_i=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}$
$\frac{d\mathcal{H}}{dt}=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}\Rightarrow$ System konservativ wenn $\mathcal{H}$ explizit zeitunabhängig
zyklische Koordinaten:
$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}=0=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i}$ dazu konjugierte Impulse sind erhalten.

$S=\int_{t_1}^{t_2}\mathcal{L}(q,\dot{q},t)dt$
Prinzip der extremalen Wirkung:
$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\delta\mathcal{L}dt=0$
$\delta S=0$ und die Bew.Glg bleiben unter Trafom. der Lag-Glg. unverändert
$\mathcal{L}\longrightarrow\mathcal{L}+\frac{df}{dt}$ mit f bel. Fkt.
$\Longrightarrow\mathcal{L}$ nicht eindeutig, erlaubt Eichfreiheiten.

3.1.1 Erhaltungsgrößen bestimmen:

1)$\mathcal{H}$ nicht explizit von t abhängig $\Longrightarrow$ Energie erhalten
2)$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}=\dot{q}_i$ wenn $=0\Longrightarrow$ allgemeine Koordinate i erhalten
3)$\mathcal{L}$ nicht explizit abhängig von $q_i\Leftrightarrow q_i$ ist zyklische Koordinate $\Longrightarrow p_i$ erhalten

3.2 Kanonische Gleichungen:

1. $\dot{q}_i=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}$ (Meist bekannt)
2. $-\dot{p_i}=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i}$
3. $\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}$

kanonisch konjugierte Impulse:
$p_i=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}$
Konfigurationsraum: $(q_1,...,q_f)$
Phasenraum: 2f-dim Raum
$(q_1,...,q_f),(p_1,...,p_f)$
$\dot{\vec{x}}=J\vec{\nabla}_x\mathcal{H},$
symplektische Matrix $J=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$

4 Mechanik kontinuierlicher Medien

Young'scher Elastizitätsmodul: $y=ka$;
$\mu=\frac{m}{a}$
charakteristische Geschw. $v=\sqrt{\frac{y}{\mu}}$
Lagrange-Dichte:$\mu(\frac{\partial q}{\partial t})^2-y(\frac{\partial q}{\partial x})^2$

4.1 D'Alembert-Gleichung:

$0=\frac{\partial^2q}{\partial t^2}-v^2\frac{\partial^2q}{\partial x^2}$

4.2 Lösung:

Eine Dimension:
q(x,t) = g(x+vt) + h(x-vt)

4.3 Separationsansatz:

$q_y(x,t)=f(x)g(t)$, mit D'Alembert
$f(x)\ddot{g}(t)=v_t^2g(t)f^{''}(x)$,$v_t=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$
$\Longrightarrow\underbrace{\frac{\ddot{g}(t)}{g(t)}}_{\text{nur von t ab}}=-C=v_t^2\underbrace{\frac{f^{''}(x)}{f(x)}}_{\text{nur von x ab}}$

5 Symmetrien und Erhaltungssätze

5.1 Galilei-Invarianz:

$t\longrightarrow t+\tau;\vec{x}\longrightarrow\vec{a}_0+\vec{v}t+R\vec{x}$
Die Galilei-Gruppe $g:(\tau,\vec{a},\vec{v},R)$

5.2 Noether-Theoreme:

$t^{'}=t+\delta t,\vec{x}_i^{'}(t^{'})=\vec{x}_i(t)+\delta\vec{x}_i(t)$
$\mathcal{L}\longrightarrow\mathcal{L}+\frac{df(x,t)}{dt}$

$S^{'}=\int\limits_{t_0^{'}}^{t_1^{'}}\mathcal{L}dt=S+f(\vec{x},t)|_{t_0}^{t_1}$
Erhaltungsgröße:
$[p_i\delta\vec{x}_i-\mathcal{H}\delta t-f(\delta\vec{x},\delta t)]|_{t_0}^{t_1}=0$
Jede kontinuierliche Symmetrie bewirkt eine Erhaltungsgröße
Reine Zeittranslationen:
$\delta\vec{x}_i=0,\vec{v}=0,f=0\Longrightarrow H\delta t=const.\Longrightarrow Energierhalt.$
Ortstranslationen:$\delta t=0,\vec{v}=0,f=0\Longrightarrow\vec{p}_i\cdot\delta\vec{a}=const.\Longrightarrow$ Impulserhalt.
Konstanz der Gesch. $\delta\vec{v}=const.$
g-g.förmige Bew. des Schwerpunktes
Inf. Rotationen: $\delta\vec{x}=\delta\vec{\varphi}\times\vec{x}$ und $\vec{v}=0,f=0,\delta t=0$
$\Longrightarrow\delta\vec{\varphi}\cdot(\vec{x}_i\times\vec{p}_i)=const.\Longrightarrow$ Drehimpulserhalt.

5.3 Lorentz-Invarianz:

Trafo: $\begin{pmatrix}ct'\\x_1'\end{pmatrix}=\Lambda\begin{pmatrix}ct\\x_1\end{pmatrix}$
Zeitdilatation: $t=\gamma t_0$
Längenkontraktion: $L=\frac{L_0}{\gamma}$

5.4 Minkowski-Raum:

Wenn System S' sich in positiver Richtung relativ zu S bewegt
$\eta=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\Lambda=$
$\begin{pmatrix}\gamma&-\beta\gamma\\-\beta\gamma&\gamma\end{pmatrix}$
$\beta=\frac{v}{c},\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$
x^μ Vektor, $\eta x=\eta_{\mu\nu}x^\nu=x_\mu$
x_μ Dualvektor,
$x^\mu(\eta x)_\mu=x^\mu(\eta_{\mu\nu}x^\nu)=x^\mu x_\mu$

6 Analytische Mechanik

6.1 Kanonische Transformationen

(q_i,p_i,t) erweiterter Phasenraum

6.2 Hamilton-Jacobi-Theorie

Erzeugende Funktionen:
$(q_1,...,q_f)\longrightarrow(Q_1,...,Q_f)$
$\Phi_1(q,Q,t);det(\frac{\partial^2\Phi}{\partial q_i\partial Q_j})\neq0$
$p_i=\frac{\partial\Phi_1}{\partial q_i},P_i=-\frac{\partial\Phi_1}{\partial Q_i}$
$p_i\dot{q}_i-\mathcal{H}=P_i\dot{Q}_i-K+\frac{d\Phi}{dt}$
$K=\mathcal{H}+\frac{\partial\Phi}{\partial t}$
Φ erzeugt kan. Transformationen
$\frac{\partial K}{\partial Q_i}=-\dot{P}_i,\frac{\partial K}{\partial P_i}=\dot{Q}_i$
$K(Q,P,t)=$
$\mathcal{H}(q(Q,P),p(Q,P),t)+\frac{\partial\Phi}{\partial t}$
Andere Erzeugenden Fkt. sind geg. durch
$\Phi_2(q,P,t):p_i=\frac{\partial\Phi_2}{\partial q_i};Q_i=\frac{\partial\Phi_2}{\partial P_i}$
$\Phi_3(p,Q,t):-q_i=\frac{\partial\Phi_3}{\partial p_i};-P_i=\frac{\partial\Phi_3}{\partial Q_i}$
$\Phi_4(p,P,t):-q_i=\frac{\partial\Phi_4}{\partial p_i};Q_i=\frac{\partial\Phi_4}{\partial P_i}$
Hamilton-Jacobi-Gleichung:
$\mathcal{H}(q,\frac{\partial\Phi}{\partial q},t)+\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0$

6.3 Liouvillescher Satz, Poisson-Klammern:

6.3.1 Liouvillescher Satz:

"Folgt aus der symplektischen Struktur der Hamiltonschen Gleichungen"
$\det Dx=\det\frac{\partial x}{\partial y}=1$
Der Hamiltonsche Fluss im erweiterten Phasenraum ändert das Phasenraumvolumen nicht, bzw.
Die Phasenraumdichte $\frac{d}{dt}\rho(q,p)=0$
$\Longleftrightarrow\frac{\partial\rho}{\partial t}+\{\rho,\mathcal{H}\}=0$

6.3.2 Poisson-Klammern:

Definition:
$\{f,g\}:=\sum\limits_{i=1}^{f}(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i})$
Identitäten:
$\{f,g\}=-\{g,f\}$
$\{f,g_1+g_2\}=\{f,g_1\}+\{f,g_2\}$
$\{f,g_1g_2\}=g_1\{f,g_2\}+g_2\{f,g_1\}$
$0=\{\{f,g_1\},g_2\}+\{\{g_1,g_2\},f\}+\{\{g_2,f\},g_1\}$
Kanonische Gleichungen:
$\dot{q_i}=\{q_i,\mathcal{H}\};\dot{p_i}=\{p_i,\mathcal{H}\}$
und $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\{\mathcal{H},\rho\}=0$

7 Statistische Physik

7.1 Grundpostulat:

$p(N)=\frac{1}{\Omega}$

7.2 Gleichgewicht:

Änderung Zustandsgrößen $\Longrightarrow$ Änderung zugänglicher Phasenraumbereich

7.3 Zugängliche Zustände:

$\Omega(E)\propto fE^{\frac{f}{2}-1}\delta E$ (ideales Gas)
$\frac{E}{f}=\frac{k_BT}{2}$

7.4 Wechselwirkungen:

Mechanische Arbeit ΔW: Energiedifferenz, die durch Veränderung der Zustandsparameter herbeigeführt wird/vom System verrichtete meachnische Arbeit
Wärmemenge ΔQ: Energiänderung die ohne Veränderung der Zustandsparameter aufgenommen wird
$\Delta E=\Delta Q-\Delta W$
Erster Hauptsatz der Thermodynamik:
$dU=\delta Q-\delta W$
Wobei $\delta W=-\frac{\partial H(a)}{\partial a}da$
mit der verallgemeinerten Kraft: $\bar{X}=\frac{\partial H(a)}{\partial a}$
Für $\delta W=0\Longrightarrow dU=dQ$
Für $\delta Q=0$ (adiabatisch) $\Longrightarrow dU=dW$

7.5 Quasistatische Zustandsänderungen

8 Temperatur und Entropie

8.1 Gleichgewichtsübergänge:

8.2 Thermisches Gleichgewicht:

$\beta=\frac{\partial\ln\Omega(E)}{\partial E}$
Absolute Temperatur:
$T=\frac{1}{\beta}=(\frac{\partial\ln\Omega(E)}{\partial E})^{-1}$

8.3 Entropie:

$S=k_B\ln\Omega;\Delta\Omega\ge0;\Delta S\ge0$
$dS=\frac{\partial S}{\partial E}\delta Q=\frac{\delta Q}{T}$
$\Omega=BV^NE^{f/2-1}\approx BV^NE^{f/2}$

8.4 Beispiele:

8.4.1 Molekülkette/Ferromagnet

Anzahl möglicher Zustände:
$\Omega(E)=\frac{N!}{N_1!N_2!}=\frac{N!}{N_1!(N-N_1)!}=\binom{N}{N_1}$
mit $N_1+N_2=N$

8.4.2 Verlauf einer Adiabate

8.4.3 Helium-Diffusion

8.4.4 Der Fermi-Druck

9 Wahrscheinlichkeit

9.1 Definitionen:

9.1.1 Axiome von Kolmogorow

1) A_i,p_i ; $0\le p_i\le1$
2) Sicheres Ereignis: $p=1$
3) Unvereinbare Ereignisse $A_1,...,A_n$;
$A_i\cap A_j=\emptyset$ Kann nicht sein,dass beide Ereignisse zeitgleich auftreten
$P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\ \forall i,j\in[1,n]$

9.1.2 Bayes'scher Satz

Gemeinsames Auftreten, falls A_2 schon aufgetreten ist:
$p(A_1\cap A_2)=p(A_1|A_2)p(A_2)$
Für unabhängige Ereignisse gilt:
$p(A_1\cap A_2)=p(A_1)p(A_2)$
W'keit für nicht A:
$p(\bar{A})=1-p(A)$

9.2 Mittelwert, Streuung, Zufallsbewegung:

Mittelwert $\langle u\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n}u_ip_i$
$\langle f(u)\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n}f(u_i)p_i$
$\langle f(u)+g(u)\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n}[f(u_i)+g(u_i)]p_i$
$=\langle f(u)\rangle+\langle g(u)\rangle$
$\langle\lambda f(u)\rangle=\lambda\langle f(u)\rangle$

9.3 Binomialverteilung:

Binomischer Satz:
$(p+q)^N=\sum\limits_{n=0}^{N}\binom{N}{n}p^nq^{N-n}$
Binomialverteilung:
$W_N(n)=\binom{N}{n}p^n(1-p)^{N-n}$
$\mu=\langle n\rangle=Np$
$\sigma=\sqrt{Np(1-p)}=\sqrt{\text{Var}(X)}$
$W_N(n_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{n_1}^2}}\exp\left(-\frac{(n_1-\langle n_1\rangle)^2}{2\sigma_{n_1}^2}\right)$

9.4 Gaußverteilung:

$G(x,\mu,\sigma)=C\cdot\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$
Gauß-Integral:
$\Omega_n\int\limits_0^\infty dre^{-r^2}r^{n-1}$
$=(\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx)^n=\pi^{\frac{n}{2}}$
Gamma-Funktion:

$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$

$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$

$\Gamma(n+1) = n!, \Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{n!4^n}\sqrt{\pi}$

9.5 Maxwell-Verteilung:
Unabhängig von Bewegungsrichtung

$f(\vec{v}) = (\frac{m}{2\pi k_B T})^{\frac{3}{2}} e^{(\frac{-m\vec{v}^2}{2k_BT})}$

$\sigma_v = \frac{1}{\sqrt{2a}} \Longrightarrow \sigma_v{}^2 = \frac{k_BT}{m}$ *(für ideales Gas) mit* $a = \frac{-m}{2k_BT}$

Mittlere Geschwindigkeit:

$< v > = \sqrt{\frac{8k_bT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$

Wahrscheinlichste Geschwindigkeit:

$\hat{v} = \sqrt{\frac{2k_bT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$

9.6 Boltzmann-Verteilung:
Die W'keit dafür, dass der Zustand E_n besetzt wird $p_n = \frac{1}{Z}e^{-\beta E_n}$ Mit der Normierungskonstante: $Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$

10 Anwendungen

10.1 Einfache Beziehungen:
$S(E,V)$ extensive Größen homogene Fkt.vom Grad 1 ;

T,P intensive Größen

Euler'scher Satz für hom. Fkt.

$\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = kf$

10.2 Wärmekapazität, spezifische Wärme:
$C_x = \lim_{\delta T\longrightarrow 0}(\frac{\delta Q}{\delta T})_x ; \frac{C_x}{\nu} = c_x$

$C_p = (\frac{\delta Q}{dT})_P = T(\frac{\partial S}{\partial T})_P = \nu c_P$

$C_V = (\frac{\delta Q}{dT})_V = T(\frac{\partial S}{\partial T})_V$

$(\frac{\partial C_V}{\partial V})_T = T(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2})$

Mischungstemperatur:

$T = \frac{m_1c_{\nu 1}T_1 + m_2 c_{\nu 2}T_2}{m_1 c_{\nu 1}+m_2c_{\nu 2}}$

$(\frac{\partial S}{\partial V})_E = \frac{P}{T}; (\frac{\partial S}{\partial E})_V = \frac{1}{T}$

10.3 Ideales Gas:
$PV = k_BNT, Nk_B = \nu R$

$E = C_VT = \frac{f}{2}k_bT; c_v = \frac{dE}{dT}$;

$c_p = c_v + R$

$c_v = \frac{3}{2}R ; c_p = \frac{5}{2}R$

$\alpha = \frac{1}{T} ; \kappa_T = \frac{1}{P}$

$\kappa_S = \kappa_T - \frac{VT\alpha^2}{C_P}$

Adiabatische Expansion/Kompression:

$PV^\gamma = const.$

$(\frac{P}{P_0})(\frac{V}{V_0})^\gamma = 1 ; \gamma \equiv \frac{c_p}{c_v}$

$T_0 \equiv \frac{P_0V_0}{\nu R}$

Isotherme Expansion/Kompression:

$W = nRT_1 \ln\frac{V_1}{V_2} = p_1V_1\ln\frac{V_1}{V_2}, \frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2}{p_1}$

Isobare Expansion/Kompression:

$W = -p\Delta V = -nR\Delta T, \frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$

10.4 Erweiterungen:
Biatomiges Gas: $f = f_{trans} + f_{rot} + 2f_{vib}$

$S = S_0 + Nk_b(\frac{3}{2}ln(\frac{T}{T_0}) + ln(\frac{V}{V_0}) - ln(N))$

11 Thermodynamische Funktionen

11.1 Thermodynamische Funktionen:
$TS = E + PV$

$(\frac{\partial E}{\partial S})_V = T ; (\frac{\partial E}{\partial V})_S = -P$

11.2 Enthalpie, freie Energie:
Energie:

$E(S,V) ; dE = TdS - PdV$

$(\frac{\partial T}{\partial V})_S = -(\frac{\partial P}{\partial S})_V$

Freie Energie:

$F(T,V) = E - TS ; dF = -SdT - PdV$

$(\frac{\partial S}{\partial V})_T = (\frac{\partial P}{\partial T})_V$

Enthalpie:

$H(S,P) = E + PV ; dH = TdS + VdP$

$(\frac{\partial T}{\partial P})_S = (\frac{\partial V}{\partial S})_P$

Freie Enthalpie:

$G(T,P) = F + PV ; dG = VdP - SdT$

$-(\frac{\partial S}{\partial P})_T = (\frac{\partial V}{\partial T})_P$

11.3 Anwendungen:
$TdS = C_PdT - TV\alpha dP$

$\alpha = \frac{1}{V}(\frac{\partial V}{\partial T})_P$ (Isobarer thermischer Ausdehnungskoeffizient)

$\kappa = -\frac{1}{V}(\frac{\partial V}{\partial P})_T$ (Isotherme Kompressibilität)

Adiabatische Kompressibilität:

$\kappa_S = -\frac{1}{V}(\frac{\partial V}{\partial P})_S$

11.3.1 Ultrarelativistisches ideales Gas
Für extrem relativistische Teilchen wie Photonen $E = cp, \Longrightarrow \Omega \approx BV^NE^f$

Thermodynamische Euler-Relation (Homogenitätsrelation):

$S = \frac{V}{T}(\frac{E}{V} + P)$

$\varepsilon = \frac{E}{V}, \varepsilon = 3P$

Stefan-Boltzmann-Gesetz:

$\varepsilon = \varepsilon_0(\frac{T}{T_0})^4, P = P_0(\frac{T}{T_0})^4$

11.4 Van-der-Waals-Gas:
Erweiterte Gasgleichung:

$(P + \frac{a\nu^2}{V^2})(V - \nu b) = \nu RT$

$[a] = \frac{[Druck][Volumen^2]}{mol^2}$ $[b] = \frac{[Volumen]}{mol}$

$(\frac{\partial C_v}{\partial V})_T = -T(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2})_V = 0$

$S(T,V) =$

$S(T_0,V_0) + C_v\ln\frac{T}{T_0} + \nu R\ln\frac{V-\nu b}{V_0 - \nu b}$

$E =$

$E(T_0,V_0) + C_V(T-T_0) - a\nu^2(\frac{1}{V} - \frac{1}{V_0})$

12 Kreisprozessse

12.1 Joule-Thomson-Effekt:
Ideales Gas beim Rausfließen in eine andere Kammer:

$\delta Q = \delta W = 0 \Longrightarrow dE = 0, E = E(T)$ die Temp. des Gases darf sich auch nicht ändern.

Temp.änderung eines Realen Gases:

$dE(T,V) = C_VdT + [T(\frac{\partial P}{\partial T})_V - P]dV,$

$dE \stackrel{!}{=} 0 \Longleftrightarrow \Delta E \stackrel{!}{=} 0$

$\Longrightarrow T - T_1 = \frac{a\nu^2}{C_V}\frac{V_2/V_1}{V_1+V_2}$

12.1.1 Joule-Thomson-Koeffizient
isobare, thermische Ausdehnungskoeffizient: $\alpha = \frac{1}{V}(\frac{\partial V}{\partial T})_P$

$\Longrightarrow \mu = -\frac{V}{C_P}(1 - \alpha T)$

mit Joule-Thompson-Koeffizient $\mu = (\frac{\partial T}{\partial P})_H$

12.1.2 Joule-Thomson-Koeffizient im VdW-Gas:
$t = \frac{T}{T_0}, v = \frac{V}{V_0}, p = \frac{P}{P_0}$

$t = (p + \frac{1}{v^2})(v-1)$ dimensionslos

$(\frac{v}{t})_p = \frac{v^3}{pv^3 - v + 2}; \alpha T = \frac{v^2 t}{pv^3 - v + 2}$

$p_{inv} = \frac{2}{v} - \frac{3}{v^2}; \tilde{\mu} = -\frac{pv^2 - 2v + 3}{pv^2 - v + 2}$

$\frac{v-2}{v^2} < p < p_{inv}$

$t_{inv} = \frac{2(v-1)^2}{v^2}$

12.2 Kreisprozesse, Wärmekraftmaschinen:

12.2.1 Carnotscher Kreisprozess:
$1 \longrightarrow 2$: isoth.Exp., $\Delta E_{12} = 0,$

$\Delta Q_{12} = \Delta W_{12} = \nu RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1}$

$2 \longrightarrow 3$: adiab.Exp., $\Delta Q_{23} = 0,$

$\Delta E_{23} = -\Delta W_{23} = -\nu c_V(T_2 - T_1)$

$3\longrightarrow 4$: isoth. Komp., $\Delta E_{34} = 0,$

$\Delta Q_{34} = \Delta W_{34} = \nu RT_2\ln\frac{V_4}{V_3}$

$4\longrightarrow 1$: adiab. Komp., $\Delta Q_{41} = 0,$

$\Delta E_{41} = -\Delta W_{41} = -c_V(T_1 - T_2)$

12.2.2 Carnotscher Wirkungsgrad:
$\eta = \frac{\Delta W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$

mit Q_1 als eingesetzte Wärme.

Ideale Wärmekraftmaschine:

$\eta = 1 - \frac{Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

Wärme fließt vom Res. 1 zum Res. 2

12.3 Weitere Kreisprozesse:

12.3.1 Otto-Prozess:
$1\longrightarrow 2$: adiab.Exp.,

$\Delta W_{12} = -\nu c_V(T_2 - T_1)$

$2\longrightarrow 3$: isoch. Druckmind.,

$\Delta Q_{23} = \nu c_V(T_3 - T_2)$

$3\longrightarrow 4$: adiab.Komp.,

$\Delta W_{34} = -\nu c_V(T_4 - T_3)$

$4\longrightarrow 1$: isoch.Druckerh.,

$\Delta Q_{41} = \nu c_V(T_1 - T_4)$

V-Arbeit, Wirkngsgr.:

$\Delta W = \nu c_V(T_1 - T_2 + T_3 - T_4)$

$\eta = \frac{\Delta W}{\Delta Q_{41}} = 1 - \frac{(T_2 - T_3)}{(T_1 - T_4)}$

12.3.2 Clausius-Clapeyron
$\frac{dP}{dT} = \frac{\|Q\|}{T(V_2 - V_1)}$

V_2 Dampfvol., V_1 Flüssigkeitsvol.

12.3.3 Stirling-Prozess:
$1\longrightarrow 2$: isoth.Exp., $\Delta E_{12} = 0,$

$\Delta Q_{12} = \Delta W_{12} = \nu RT_1\ln\frac{V_2}{V_1}$

$2\longrightarrow 3$: isoch. Abkühl.,

$\Delta Q_{23} = \nu c_V(T_2 - T_1)$

$3\longrightarrow 4$: isoth. Komp., $\Delta E_{34} = 0,$

$\Delta Q_{34} = \Delta W_{34} = \nu RT_2\ln\frac{V_4}{V_3} = \nu RT_2 \ln\frac{V_1}{V_2}$

$4\longrightarrow 1$: isoch. Erwärm.,

$\Delta Q_{41} = \nu c_V(T_1 - T_2)$

V-Arbeit, Wirkngsgr.:

$\Delta W = \nu RT(T_1 - T_2)\ln\frac{V_2}{V_1}$

$\eta = \frac{\Delta W}{\Delta Q_{12}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

12.3.4 Joulscher Prozess:
$1\longrightarrow 2$: isoba. Erwärm.,

$\Delta Q_{12} = nc_p^{mol}(T_2 - T_1),$

$\Delta W_{12} = nR(T_2 - T_1)$

$2\longrightarrow 3$: adiab. Exp.,

$\Delta W_{23} = -nc_p^{mol}(T_3 - T_2)$

$3\longrightarrow 4$: isoba. Erwärm.,

$\Delta Q_{34} = nc_p^{mol}(T_4 - T_3),$

$\Delta W_{34} = nR(T_4 - T_3)$

$4\longrightarrow 1$: adiab. Komp.,

$\Delta W_{41} = -nc_p^{mol}(T_1 - T_4)$

V-Arbeit, Wirkngsgr.:

$\Delta W = nc_p^{mol}(T_1 - T_2 + T_3 - T_4)$

$\eta = \frac{\Delta W}{\Delta Q_{12}} = 1 - \frac{T_3 - T_4}{T_2 - T_1}$

12.3.5 Ericsson-Prozess:
$1\longrightarrow 2$: isoba. Exp.,

$\Delta Q_{12} = nc_p^{mol}(T_1 - T_2),$

$\Delta W_{12} = nR(T_1 - T_2)$

$2\longrightarrow 3$: isoth. Exp., $\Delta W_{23} = \Delta Q_{23} = nRT_1\ln\frac{V_3}{V_2} = nRT_1\ln\frac{P_1}{P_2}$

$3\longrightarrow 4$: isoba. Komp.,

$\Delta Q_{34} = nc_p^{mol}(T_2 - T_1),$

$\Delta W_{34} = nR(T_2 - T_1)$

$4\longrightarrow 1$: isoth. Komp., $\Delta W_{41} = \Delta Q_{41} = nRT_2\ln\frac{V_1}{V_4} = nRT_2\ln\frac{P_2}{P_1}$

V-Arbeit, Wirkngsgr.:

$\Delta W = \nu RT(T_1 - T_2)\ln\frac{P_1}{P_2}$

$\eta = \frac{\Delta W}{\Delta Q_{23}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

12.3.6 Diesel-Prozess:
$1\longrightarrow 2$: isoba. Exp.,

$\Delta Q_{12} = nc_p^{mol}(T_2 - T_1),$

$\Delta W_{12} = nR(T_2 - T_1)$

$2\longrightarrow 3$: adiab. Exp,

$\Delta W_{23} = -nc_V^{mol}(T_3 - T_2)$

$3\longrightarrow 4$: isoch. Druckmin.,

$\Delta Q_{34} = nc_V^{mol}(T_4 - T_3)$

$4\longrightarrow 1$: adiab. Komp,

$\Delta W_{34} = -nc_V^{mol}(T_1 - T_4)$

V-Arbeit, Wirkngsgr.:

$\Delta W = nc_p^{mol}(T_2 - T_1) + nc_V^{mol}(T_4 - T_3)$

$\eta = \frac{\Delta W}{\Delta Q_{12}} = 1 - \frac{T_3 - T_4}{\gamma(T_2 - T_1)}$

13 Phasengleichgewicht

13.1 Gleichgewicht, Stabilität:
Vorgegebene Temperatur und festes Volumen $\Longrightarrow$ Freie Energie F(T,V) wird minimal

Vorgegebene Temperatur und fester Druck $\Longrightarrow$ Freie Enthalpie G(T,P) wird minimal

Vorgegebene A und feste B $\Longrightarrow$ X(A,B) wird minimal

13.2 Chemisches Potential:
$-\mu = (\frac{\partial S}{\partial N})_{E,V} = (\frac{\partial E}{\partial N})_{S,V}$

thermisches GG: $T_1 = T_2$

mechanisches GG: $P_1 = P_2$

Phasengleichgewicht: $\mu_1 = \mu_2$

13.3 Phasen-/Reaktionsgleichgewichte:
Phase: chem. phys. homogener Teil eines Gesamtsystems

Komponente: chemisch homogener Teil eines Gesamtsystems **Gibbs'sche Regel:** Anzahl der freien Variablen:

$n_F = 2 + n_k - n_p$

Gibbs-Duhem-Beziehung

$ST = E + PV - \mu N$

Homogenitätsrelation: $F = -PV - \mu N$

$G = \mu N$ chem. Pot= freie Enth. pro Teilchen.

13.4 Phasenübergang im van-der-Waals-Gas:
Stabilitätsbed: $(\frac{\partial P}{\partial V})_T < 0$

$dg = vdp,$

$g(v,p) = g_0 + vp - tln(v-1) - \frac{1}{v}$

13.5 Latente Wärme
$\Delta Q = TS = k_BTln\frac{V_g - V_0}{V_f - V_0}$

14 Sonstige Hilfsmittel:
Lösungsansätze für charakteristische DGL:

$x(t) = A\sin(\omega_0 t - \phi) + B\cos(\omega_0 t - \phi)$

für $\ddot{x} + \omega_0{}^2 x = 0$

$x(t) = A\sinh(\sqrt{\lambda}t) + B\cosh(\sqrt{\lambda}t)$ für $\ddot{x} - \lambda x = 0$

Einheiten und Größen:

$R = 8.31\cdot 10^7\frac{erg}{mol K}$

1 erg=$1\cdot 10^{-7}$ Joule

1 erg= 1dyn$\cdot$ cm

1 dyn= $1\cdot 10^{-5}N$

14.1 Krummlinige Koordinaten
Kugelkoord: $\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta\end{pmatrix}$

$\det(J) = r^2\sin\theta$;

$\dot{\vec{x}}^2 = R^2(\dot\vartheta^2 + \omega^2 sin^2\vartheta)$

Zylinderkoordinaten: $\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z\end{pmatrix}$

$\det(J) = r ; \dot{\vec{x}}^2 = (\dot r^2 + r^2\dot\varphi + \dot z^2)$

Polarkoordinaten: $\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi\end{pmatrix}$

$\det(J) = r ; \dot{\vec{x}}^2 = (\dot r^2 + r^2\dot\varphi)$