Theoretische Physik III

Elektrodynamik

1 Phänomenologie der Maxwell Gleichungen

1.1 Maxwell Gleichungen

Nr.	Im Vakuum	In Materie	Name
1	$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho$	$\operatorname{div}\vec{D} = 4\pi\rho$	Gauß G.
2	$\operatorname{div}\vec{B} = 0$	$\operatorname{div}\vec{B} = 0$	(G.G. f. B-felder)
3	$\operatorname{rot}\vec{E} = -\partial_{ct}\vec{B}$	$\operatorname{rot}\vec{E} = -\partial_{ct}\vec{B}$	(InduktionsG.)
4	$\operatorname{rot}\vec{B} = \partial_{ct}\vec{E} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}$	$\operatorname{rot}\vec{H} = \partial_{ct}\vec{D} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}$	(Ew. Durchfl./Amp.)

1.2 Potentialtheorie

1.2.1 Elektrostatisches Potential

$\frac{\vec{r}-\vec{r_1}}{|\vec{r}-\vec{r_1}|^3} = -\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$; $\vec{E}(\vec{r}) = q_1\frac{\vec{r}-\vec{r_1}}{|\vec{r}-\vec{r_1}|^3}$

Das elektrostatische Potential

$\phi(\vec{r}) = \int dr^3\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

Die Poisson-Gleichung:

$\Delta\phi = -4\pi\rho$; im Vakuum: $\Delta\phi = 0$

Die Energiedichte:

$W = \frac{1}{2}\int d^3r\rho(\vec{r})\cdot\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{8\pi}\int d^3r|\vec{E}|^2$

1.2.2 Die Dirac-δ-Distribution

$\delta_{(x)} = 0\ \forall x \neq 0, \int\delta_{(x)}dx = 1$

$f_{(x)}$ an der Stelle x=a stetig

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{(x)}\delta_{(x-a)}dx = f_{(a)}$

$\int\limits_a^b \delta(x)f(x)dx = \begin{cases} f(0) & falls\ 0\in[a,b] \\ 0, & sonst\end{cases}$

$\delta(f(x)) = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$ für NS x_i von f

$\delta_{(ax)} = \frac{\delta_{(x)}}{|a|}$ $\rho_{(\vec{r})} = q\cdot\delta_{D(\vec{r}-\vec{r}')}$ falls q bei $\vec{r}'$ liegt

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\delta_{D(x)}\right) = -\delta_{D(x)}$

Die Dirac-Delta $\delta(x)$ hat immer die inverse Einheit von x

$\rho(\vec{x}) = Q\cdot N\cdot\delta(\vec{x})$ so dass $\int_V\rho(\vec{x}')dx' = q$

In mehreren Dimesionen gilt:

$\delta_D^{(3)}(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$

Beispiele:

$\int\limits_0^{\infty} dr\ r\ \delta(r-R) = R$

$\int\limits_0^{2\pi} d\phi\ \delta(\phi-\phi_0) = 1$

1.2.3 Die Heavside-Funktion

Im Integral ändert die θ-Funktion die Integrationsgrenzen

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\theta_{(x)} = \delta_{D(x)}$

$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}x\theta(x) = \delta_{D(x)}$

$(x)\Theta(x)dx = \int\limits_0^{\infty} f(x)dx$

Brückenfunktion von a bis b:

$\theta(x-a)\cdot\theta(b-x)$ oder $\theta(x-a)-\theta(x-b)$

1.3 Die Green'schen Sätze

$\Delta\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')$

1.3.1 Dirichlet- und Neumann-Green-Fkt.

Parabolische par. DGL:

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d^{r'}\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi}\int_{\partial V} dS' \cdot\left[\underbrace{\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\frac{\partial\phi}{\partial n}}_{\text{Neumann-Randbed}}\ \underbrace{-\phi(\vec{r}')\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{\text{Dirichlet-Randbed}}\right]$$

Dirichlet-Randbedingung:

D (Anforderung an die Funktion selbst am Rand)

Neumann-Randbedingung:

$\frac{\partial\phi_1}{\partial n} = \frac{\partial\phi_2}{\partial n}$ Green-Funktionen über Fourier-Raum:

Die Faltungen im Realraum entsprechen den Produkten im Fourier-Raum

$\phi\otimes\psi(\vec{r}) = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}[\phi(\vec{k}\cdot\psi(\vec{k})]e^{i\vec{k}\vec{r}} = \int d^3r'\phi(\vec{r}')\cdot\psi(\vec{r}-\vec{r}')$

$\frac{4\pi}{k^2}$ ist die Green-Funktion von Δ im Fourier-Raum

2 Fourier-Transformierte der Maxwellgleichungen:

2.1 Die Fourier-Transformation in mehreren Dimensionen:

Hintransformation:

$\tilde{f}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dte^{i\omega t}f(t)$

$\tilde{f}(\vec{k}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^3xe^{-i\vec{k}\vec{x}}f(\vec{x})$

$\tilde{f}(\omega,\vec{k}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^3xdte^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}f(t,\vec{x})$

Rücktransformation:

$f(\vec{x},t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d^3kd\omega}{(2\pi)^4}e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}\tilde{f}(\vec{k},\omega)$

$\mathcal{F}$[**Maxwell Gleichungen**] :

1) $\vec{k}\cdot\tilde{\vec{E}}(\vec{k},\omega) = -i4\pi\tilde{\rho}(\vec{k},\omega)$

2) $\vec{k}\cdot\tilde{\vec{B}} = 0$

3) $\vec{k}\times\tilde{\vec{E}}(\vec{k},\omega) = \frac{\omega}{c}\tilde{\vec{B}}(\vec{k},\omega)$

4) $\vec{k}\times\tilde{\vec{B}}(\vec{k},\omega) = -\frac{\omega}{c}\tilde{\vec{E}}(\vec{k},\omega) - i\frac{4\pi}{c}\tilde{\vec{j}}(\vec{k},\omega)$

3 Vektorpotential $\vec{A}$

Die Helmholtz-Zerlegung

$\vec{X}(\vec{r}) = -\nabla\Psi + \operatorname{rot}\vec{Q}$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \operatorname{rot}\underbrace{\left(\frac{1}{c}\int_V d^3r'\frac{\vec{j}(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)}_{\vec{A}} = \operatorname{rot}\vec{A}$$

Biot-Savart nach Umformung mit Hilfspotential:

$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int_V d^3r'\vec{j}(\vec{r}')\times\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$ (Zur Berechnung ersetze Beträge durch Formeln für Abstände (Pythagoras o. ä.))

Mit der Coulomb-Eichung folgt:

$\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$

Anschaulich bedeutet dies:

$\operatorname{div}\vec{A} = -\partial_{ct}\phi$

Übersicht der Potentiale und Felder: im statischen Fall und mit Coulomb-Eichung gilt:

$$\begin{tikzcd}
\phi \arrow[d, "-\nabla\phi=\vec{E}"] \arrow[dd, bend left=60, "\Delta\phi=-4\pi\rho"] \\
\vec{E} \arrow[d, "\operatorname{div}\vec{E}=4\pi\rho"] \\
\rho \arrow[uu, bend left=60, "\int d^3r'G(\vec{r},\vec{r}')"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\vec{A} \arrow[d, "\vec{B}=rot\vec{A}"] \arrow[dd, bend left=60, "\Delta\vec{A}=-\frac{4\pi}{c}\vec{j}"] \\
\vec{B} \arrow[d, "\operatorname{rot}\vec{B}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}"] \\
\vec{j} \arrow[uu, bend left=60, "\int d^3r'G(\vec{r},\vec{r}')"]
\end{tikzcd}$$

4 Potentiale und Wellengleichungen:

4.1 Eichtransformationen:

Die Potentiale sind bestimmt bis auf Wahl der Eichung.

die Coulomb-Eichung:

$\operatorname{div}\vec{A} = 0$

Die **Lorenz-Eichung** lautet

$\operatorname{div}\vec{A} = -\partial_{ct}\phi$

Bei einer Trans. der Art:

$\vec{A}\longrightarrow\vec{A}+\nabla\chi$ ist das B-Feld **eichinvariant**

Wenn man nun die die Coulomb-Eichung auf das neue Feld $\vec{A}'$ anwendet, kommt man auf die Beziehung

$\Delta\chi = -\operatorname{div}\vec{A}$

4.2 Wellengleichungen:

Im dynamischen Fall folgt mit Lorenz-Eichung:

$\vec{B}(\vec{r}) = \operatorname{rot}\vec{A}$ und

$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi - \partial_{ct}\vec{A}$

und daraus die Wellengleichungen:

$-\Box\phi = -4\pi\rho$

$-\Box\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$

Mit $\Box = \partial^2ct - \Delta$ als der D'lambert-Operator

5 Multipolentwicklung:

Taylor:

$\phi_{(\vec{r})} = \frac{q}{r} + \sum_i\frac{x_i}{r^3}\cdot P_i + \frac{1}{6}\sum_{ij}\frac{3x_ix_j - r^2\delta_{ij}}{r^5}Q_{ij} + \ldots$

Transformationen der Multipolmomente:

Q als Skalar ist invariant.

$\vec{x}\to\vec{x}-\vec{a}$ (Verschiebung):

$\vec{P}\to\vec{P}+Q\vec{a}$; $q_{ij}\to$

$\vec{x}\to-\vec{x}$ (Spiegelung):

$\vec{P}\to-\vec{P}$; $q_{ij}\to$

$q_{ij} + \left(a_ia_j - \frac{1}{3}|\vec{a}|^2\delta_{ij}\right)Q + a_iP_j + a_jP_i - \frac{2}{3}\vec{a}\vec{P}\delta_{ij}$

$\vec{x}\to D\vec{x}$ (Drehung, Drehmatrix D):

$\vec{P}\to D\vec{P}$; $q_{ij}\to D_{ik}D_{jl}q_{ij}$

Multipolmomente:

$Q = \int dV\rho_{(\vec{r})}$

$P_i = \int dV\rho_{(\vec{r})}r_i$

$q_{ij} = \int dV\rho_{(\vec{r})}\left(r_ir_j - \frac{\delta_{ij}\vec{r}^2}{3}\right)$ (Symmetrisch, spurfrei)

5.1 Sphärische Multipolent.:

$q_{lm} = \int dV\rho(\vec{x})r^lY^*_{lm}(\theta,\phi)$

B-Feld aus Punktdipol $\vec{p}$ in z-Richtung:

$\vec{B} = \frac{3(p\cdot\vec{e_r})\vec{e_r}-\vec{p}}{r^3}$

6 EM-Wellen:

Es gilt $\vec{E} = \vec{E}_0\cdot e^{\pm i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}$ mit $\vec{k}\cdot\vec{E} = 0$

6.1 Polarisation:

Lineare Polari.: Superpos. von 2 ebenen Wellen ohne Phasenverschiebung $\vec{E}_1+\vec{E}_2$ mit $\phi_1 = \phi_2$ oder $\phi_1 = \phi_2\pm\pi$

Zirkulare Polari.: Superpos. von 2 ebenen Wellen mit Phasenverschiebung $\vec{E}_1+\vec{E}_2$ mit $\phi_1 = \phi_2\pm\frac{\pi}{2}$ also

$\vec{E}_1+\vec{E}_2 = (\vec{E}_0 + i\vec{E}_0')e^{\pm i(\omega t-\vec{k}\vec{x})}$

$\vec{E} = \vec{E}_0\cdot e^{\pm i(\omega t-\vec{k}\vec{x})}$

Verhältnis E- und B-Feld:

$B = \frac{E}{c}$

EM-Wellen in Materie:

$(\epsilon\cdot\mu\partial^2_{ct}-\Delta)\vec{H} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c}\partial_{ct}\vec{H} = 0$ Wellenglg. mit Dämpfungsterm

Poynting-Vektor:

$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B}$

Der Poynting-Satz:

$\operatorname{div}\vec{S} + \vec{j}\cdot\vec{E} = -\partial_t(w_{el}+w_{mag})$

Energierhaltung:

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_V d^3r(W_{El}+W_{mag}) = -\int_{\partial V}d\vec{Q}\cdot\vec{S} - \int\limits_V d^3r\vec{j}\cdot\vec{E}$

Differentielles Ohm-Gesetz:

$\vec{j} = \sigma\vec{E}$ (Isotropes Medium); $j_i = \sigma_i^jE_j$ (Allgemein tensoriell)

Ohm-Gesetz: $v\frac{q}{\Delta V}j = \frac{I}{A} = \sigma E = \sigma\frac{U}{l}$

$I = \frac{\sigma A}{l}U = \frac{U}{R}$

$R = \frac{l}{\sigma A}$

7 Impulstransport durch das EM-Feld:

Impulsänderung:

$\frac{d\vec{p}}{dt} = \int_V d^3r(\rho\cdot\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{B})$

$\frac{d}{dt}(\vec{p} + \frac{1}{c}\int_V d^3r\vec{S})_i = \int_V d^3r\partial_jT_{ij}$

Also $dF_i = T_{ij}dA_j$

Maxwell'scher Spanungstensor:

$T_{ij} = \frac{1}{4\pi}\cdot[E_iE_j + B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}(E_kE_k + B_kB_k)]$

symmetrischer Tensor $T_{ij} = T_{ji}$

Mit $E_kE_k + B_kB_k = 8\pi(w_{el}+w_{mag})$

$w_{el}+w_{mag}+T_{ii} = 0$

8 Zeitabhängige Green-Funktion und Retardation

$\Box G(\vec{r},t,\vec{r}',t') = 4\pi\delta_D(\vec{r}-\vec{r}')\delta_D(t-t')$

Retardierte Green-Funktion:

$G_{ret}(t,t',\vec{r},\vec{r}') = \frac{\delta(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

9 Liénard-Wiechert-Potentiale

Potentiale einer bewegten Punktladung:

$\Box\Psi(\vec{r},t) = 4\pi\rho(\vec{r},t)$

$$\Psi(\vec{r},t) = \int d^3r'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\int dt'\delta(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})\cdot q(\vec{r},t')$$

$$\phi_{(\vec{r},t)} = \left.\frac{q}{\left|\vec{r}-r_{0(\vec{t'})}\right|\cdot\left(1-\vec{n}_{(t')}\cdot\frac{\vec{v}_{(t')}}{c}\right)}\right|_{t'=t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}_{0(t')}|}{c}}$$

$\rho(\vec{r}',t') = q(\vec{r}'-\vec{r}_0'(t'))$

$j(\vec{r}',t') = q\vec{v}(t')\cdot\delta_D(\vec{r}'-\vec{r}_0'(t'))$

Vektorpotential:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int d^3r'\frac{\vec{j}(\vec{r}',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

10 Spezielle Relativität und Lorentz-Geometrie

10.1 Lorentz-Transformation

Lorentz-Boost:
Wenn S ruht und S' sich in positive x-Richtung bewegt:
(sonst positive Vorzeichen)

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

$$\Lambda^\mu_\nu(\psi) = \begin{pmatrix} cosh(\psi) & -sinh(\psi) \\ -sinh(\psi) & cosh(\psi) \end{pmatrix}$$

mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}; \beta = \frac{v}{c}$

Transformation: $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$
Lorentz-Invariante:
$s^2 = x_\nu x^\mu = \eta_{\nu\mu} x^\mu x\nu$ mit $\eta_{\nu\mu} =$, da
$(ct')^2 - x'^2 = (ct)^2 - x^2$

$$\begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Rapidiät:
$\Psi = artanh(\beta); \beta = tanh(\Psi); \gamma = cosh(\Psi)$
Eigenbeschleunigung: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\psi = \frac{g}{c}$

10.2 Relativistische Effekte:

Additionstheorem:
(v_1 und v_2 sind Geschwindigkeiten aus dem Ruhesystem aus betrachtet, v_rel Relativgeschwindigkeit von einem der beiden Beobachter aus):
$v_{rel} = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1 \cdot v_2}{c^2}}$

Längenkontraktion
(Mit $\Delta x'$ als die Länge, die das bewegte Objekt aus dem unbewegten Bezugssystem betrachtet zu haben scheint, und Δx als der Länge, die das Raumschiff wirklich hat):
$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma}$

Zeitdilatation
(Mit $\Delta t'$ als der Zeit, die vom unbewegten Beobachter aus gesehen auf dem bewegten Raumschiff zu vergehen scheint, während im unbewegten System die Zeit Δt vergeht):
$\Delta t' = \Delta t \cdot \gamma$

Relativistischer Impuls:
$p_{rel} = mv\gamma$

Aberration:
S ruht, S' bewegt sich mit v in x-Richtung. In S misst man die Gesch. u_i und in S' u'_i vom gesehenen Objekt:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{(1+\frac{u'_x v}{c^2})}, u_y = \frac{u'_y}{\gamma(1+\frac{u'_x v}{c^2})}$$

Der schnellere Beobachter, sieht einen kleineren Winkel. Die Gesch. des Objekts spielt nur eine Rolle für die Absolutwinkel.

10.3 Lie-Gruppen:

Lorentz-Transormationen und Rotationen bilden eine kontinuierlich parametrisierte Gruppe.
Die Pauli-Matrizen:

$$\sigma^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \sigma^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(\alpha) = exp(\alpha\sigma^{(2)})$ also werden Drehungen durch $\sigma^{(2)}$ erzeugt. Genauso werden Lorentz-Trafos durch

$$\Lambda(\psi) = exp(\psi\sigma^{(3)}) = \sum_n \frac{\psi^n}{n!}[\sigma^{(3)}]^n$$

Eigenschaften:
Rot/Rapiditäten sind additive kont. Parameter:
$\Lambda(\psi)\Lambda(\phi) = \Lambda(\psi+\phi)$
Neutrales El:
$\Lambda(0) = \sigma^{(0)}$, v=0
Inverses Element:
$\Lambda(\psi)\Lambda(-\psi) = \sigma^{(0)}, \Lambda^{-1}(\psi) = \Lambda(-\psi)$
Invarianten:
Die Pauli-Matrizen sind alle spurfrei also
$det(exp(B)) = exp(trB)$
die Determinante eine Invariante
$det\Lambda = cosh^2 - sinh^2 = 1$
Orthogonalität:
Orthogonal bzg. der Minkowski-Metrik
$\Lambda(\psi)^t \cdot \eta \cdot \Lambda(\psi) = \eta$ mit $\eta \propto \sigma^{(1)}$
Bakel-Hausdorf-Cambell-Formel:
$exp(A)exp(B) = exp(A+B) \cdot exp(-\frac{1}{2}[A,B])$
Additionstheorem für Geschwindigkeiten:
$\beta_{\psi+\phi} = \tanh(\psi+\phi) = \frac{\beta_\phi + \beta_\psi}{1+\beta_\phi \cdot \beta_\psi}$
Beta-Gamma-Identitäten:
$\gamma^2\beta^2 - \gamma^2 = 1$
$\gamma - \gamma\beta = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$
$\frac{c}{\gamma} = \sqrt{c^2 - v^2}$

10.4 Raum-Zeit-Diagramme:

$s^2 > 0$ zeitartig
$s^2 < 0$ raumartig
$s^2 = 0$ lichtartig
Für raumartige Punkte gibt es keine kausale Ordnung der Ereignisse.

10.5 Die Eigenzeit:

Man hat eine Trajektorie: $x^\mu(\tau)$
Somit ist die Eigengeschwindigkeit definiert:
$u^\mu(\tau) = \frac{dx^\mu}{d\tau}$
Für das Eigenzeitdifferential gilt:

$$d\tau = \sqrt{(1 - \frac{\delta_{ij}}{c^2}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt})}dt$$

$$\tau = \int_A^B d\tau = \int_A^B dt\sqrt{(1 - \frac{\delta_{ij}}{c^2}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt})}$$

$$= \int_A^B dt\sqrt{1-\beta^2} = \int_A^B \frac{dt}{\gamma}$$

Die Länge der Kurve wird in jedem BZS gleich erscheinen, da wir sie über eine Invariante ausgedrückt haben. $ds^2 = (cd\tau)^2$

11 Grundlagen zur Indexnotation:

$\eta^{\mu\lambda}\eta_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu$
$x_\mu = \eta_{\mu\nu}x^\nu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$
$x^\mu = \eta^{\mu\nu}x_\nu = (x^0, x^1, x^2, x^3)^t = (x_0, -x_1, -x_2, -x_3)^t$
Skalarprodukt: $x^\mu x_\mu = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$
$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{imn} = \delta^m_j\delta^n_k - \delta^n_j\delta^m_k$
Ableitung in 4er Koord.:
$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}$

$$\partial_\mu = \begin{pmatrix} \partial_{ct} \\ -\nabla \end{pmatrix}$$

$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \Lambda^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu}$

Divergenz in 4er Koord.: $\partial_\mu x^\mu = \partial_{ct}(ct) + \partial_i(x^i) = 4$
D'Alembert in 4er Koord.:
$\square = \partial_\mu\partial^\mu = \partial^2_{ct} - \partial_i\partial^i$
$\partial_i\partial^i = \Delta$
$\frac{\partial A_\mu}{\partial A_\sigma} = \delta^\sigma_\mu$

12 Kovariante Elektrodynamik:

el. Feldstärke(Faraday-)Tensor:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{E} \\ \vec{E} & \varepsilon_{ijk}B_k \end{pmatrix}$$

$F^{\nu\mu} = -F^{\mu\nu}$ antisymm.
$F^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta}$
$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = (\delta^i_m\delta^j_n - \delta^j_m\delta^i_n)\partial^m A^n$
$= \varepsilon_{kmn}\varepsilon^{kij}\partial^m A^n = \varepsilon_{ijk}B_k$
Dualer Feldstärketensor: $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$

4-er Stromdichte $j^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ j^i \end{pmatrix}$

(Die Ladungsdichte fließt entlang der ct-Achse mit c)

4-er Potential $A^\mu = \begin{pmatrix} \phi \\ A^i \end{pmatrix}$

12.0.1 Die Lorentz-Kraft:

$p^\mu = mu^\mu = (m\gamma c, m\gamma v^i)^t$
$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma\frac{dx^\mu}{dt}$
$\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{q}{m} \cdot F^{\mu\nu}u_\nu$
$u_\mu u^\mu = c^2$
Lorentz-Kräfte erhalten die Zeitartigkeit von u^μ.
Teilchen verlassen nie die Lichtkegel.

12.0.2 Kovariante Maxwellgleichungen :

Inhomogen: $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}j^\nu$
Homogen: $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$
Oder:
$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F^{\mu\nu} = 0$

12.0.3 Kontinuitätsgleichung:

$\partial_\mu j^\mu = \partial_{ct}(c\rho) + \partial_i j^i = 0$
$\partial_\mu j^\mu$ eine Lorentz-Invariante

12.1 Wellengleichung:

$\square A^\nu = \frac{4\pi}{c}j^\nu$

12.2 Eichungen:

Lorenz-Eichung: $\partial_\mu A^\mu = 0$
Coulomb-Eichung: $\partial_i A^i = 0$
$A^\mu \longrightarrow A^\mu + \partial^\mu\chi$
Die Bianchi-Identität: $\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0$

12.3 Lorentz-Invarianten der Felder:

$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}\eta_{\beta\nu}F^{\alpha\beta}F^{\mu\nu} = \tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \propto$
$\vec{E}^2 - \vec{B}^2 \neq$Energie
Die Energiedichte ändert sich vom Bezugssystem zu Bezugssystem.
$F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} \propto \vec{E} \cdot \vec{B}$ pseudoskalar auch invariant.
Pseudoskalar bei Raumspiegelung:
$\vec{x} \mapsto -\vec{x}$

13 Relativistischer Hamilton-Formalismus:

Die Energie- und Impulserh. ist geg. weil $\mathcal{L}$ nicht expl. von x^μ abh.
Eichinvarianz: Ladungserh.
Lorentz-invariante Wirkung

$$S = c\int_A^B d\tau = \int_A^B \sqrt{\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}d\tau$$

Die Lagrange-Funktion: $\mathcal{L} = \sqrt{\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}$

Die Euler-Lagrange-Gleichung: $\frac{d}{d\tau}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\sigma} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\sigma}$

$\mathcal{H} = \sqrt{(cp)^2 + (mc^2)^2}$
Die Legendre-Transformation:
$\mathcal{H} = (v\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} - \mathcal{L})$

E-Statik:
Die Lagrange-Dichte: $\mathscr{L} = (\phi, \partial_i\phi)$
Die Wirkung: $S = \int d^4x\mathscr{L}(\phi, \partial_i\phi)$
Aus dem Hamilton-Prinzip $\delta S = 0$ folgt:
$\partial_i\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_i\phi)} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi} = 0$
Dann die Lagrange-Dichte:
$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\delta^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi - 4\pi\rho\phi = \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - 8\pi\rho\phi)$
Mit $\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_i\phi)} = \partial_i\partial^i\phi = \Delta\phi = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi} = -4\pi\rho$ Poisson Glg.

E-Dynamik mit Lorentz-Invarianten:
$\mathscr{L} = \mathscr{L}(A_\mu, \partial_\mu A_\nu) = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{4\pi}{c}A_\mu j^\mu$
Und damit **die Wirkung:**
$S = \int d^4x \quad \mathscr{L}(A_\sigma, \partial_\rho A_\sigma)$
Daraus resultiert die **Euler-Lagrange-Formel:**
$\partial_\rho\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\rho A_\sigma)} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_\sigma} = 0$
Keine Lagrange-Beschreibung, falls mag. Ladungen.
$\partial_\rho\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\rho A_\sigma)} = \partial_\rho F^{\rho\sigma} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_\sigma}\frac{4\pi}{c}j^\sigma$ Maxwell
Alternativ: $\partial_\rho\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\rho A_\sigma)} = \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial(\partial_\rho A_\sigma)}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial F^{\mu\nu}}$

13.1 Energie- Impulserhaltung:

Skalares Feld:(unabh. von x^μ)
$-T^{\alpha\mu} = \eta^{\alpha\beta}\mathscr{L} - \partial^\alpha\phi\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}$
$\partial_\mu T^{\alpha\beta} = 0$
Maxwell-Feld:(unabh. von x^μ)
$-T^{\alpha\rho} = \eta^{\alpha\beta}\mathscr{L} - \partial^\alpha A_\sigma\partial_\rho\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\rho A_\sigma)}$
$\partial_\rho T^{\alpha\rho} = 0$
$T^\alpha_\alpha = \eta_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} = 0$ (massenloses Feld)
$T^{i0} \cong \frac{4\pi}{c}S^i$ Poynting Vektor
$\partial_\alpha T^\alpha = 0$
Kovariante E-Dynamik-Wellen

$\Box F^{\mu\nu} = 0$ mit Ansatz $F^{\mu\nu} \propto exp(\pm i k_\sigma x^\sigma$ falls $k_\sigma k^\sigma = 0$
Mit $k^\mu = (\frac{\omega}{c}, k^i)^t$
$k_\sigma k^\sigma = (\frac{\omega}{c})^2 - k^2 = 0$
$\frac{\omega}{k} = v_{ph}$ und $\frac{d\omega}{dk} = v_g$
Photonen und Masse:
$\mathscr{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{m^2}{2}\phi$
$\Box\phi = m^2\phi \quad \omega(k) = \sqrt{(ck)^2 + (mc)^2}$

14 Sonstige Hilfsmittel

14.1 Fourier-Transformationen:

Vollständigkeitsrelation:
$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} exp(i\vec{k}\vec{x}) \cdot exp(-i\vec{k}\vec{x'}) = \delta_D(x - x')$

Orthogonalitätsrelation: $\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}$ TODOOOTransformation:

$g_{(\vec{k})} = \int a^n x g_{(\vec{x})} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$

$g_{(\vec{x})} = \int \frac{a^n K}{2\pi^n} x g_{(\vec{k})} e^{+i\vec{k}\cdot\vec{x}}$
Weitere Eigenschaften:
$\mathcal{F}[\alpha f(x) + \beta g(x); k] = \alpha\mathcal{F}[f(x); k] + \beta\mathcal{F}[g(x); k]$
$\mathcal{F}[f(x-a); k] = e^{-ika}\mathcal{F}[f(x); k]$
$\mathcal{F}[f(ax); k] = \frac{1}{a}\mathcal{F}[f(x); \frac{k}{a}], a > 0$
$\mathcal{F}[f(-x); k] = \mathcal{F}[f(x); -k]$
$\mathcal{F}[\frac{d}{dx} f(x); k] = ik\mathcal{F}[f(x); k]$
$\mathcal{F}[x f(x); k] = i\frac{d}{dx}\mathcal{F}[f(x); k]$
$\mathcal{F}[f(x); -k] = \mathcal{F}[f(x); k]^*$ für $f(x) \in \mathbf{R}$
Differentialoperatoren im Fourier-Raum:

14.2 Kugelflächenfunktionen:

Erfüllen Helmholtz-DGL:
$\Delta Y_{lm}(\theta, \phi) = l(l+1) Y_{lm}(\theta, \phi)$

$Y_{lm}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2l+1}{2}\cdot\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(cos\theta)e^{im\phi}$

$Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$
$\langle Y_{lm}(\theta, \phi), Y_{l'm'}(\theta, \phi)\rangle =$
$\int d\Omega Y_{lm}(\theta, \phi)^* Y_{l'm'}(\theta, \phi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$
Jede Funktion die von θ und ϕ abhängt, kann als:

$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi)$

mit $a_{lm} = \int d\Omega' Y_{l'm'}(\theta, \phi)^* f(\theta', \phi') =$
$\langle Y_{l'm'}(\theta, \phi) | f(\theta', \phi')\rangle$ entwickelt werden

14.3 Legendre-Polynome:

Die ersten Legendre-Polynome lauten:
$P_0(x) = 1$
$P_1(x) = x$
$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
Außerdem gilt die Orthogonalitätsrelation

$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$

So kann man jede Funktion entwickeln
$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$

14.4 Assoziierte Legendre-Polynome:

Formel von Rodriguez:
$P_{lm}(\mu) = \frac{(-1)^n}{2^l l!}(1-\mu^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^{l+m}}{d_\mu^{l+m}}(\mu^2 - 1)^l$

Orthogonalitätsrelation:

$\int_{-1}^{1} P_k^m P_l^m dx = \frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!}\delta_{kl}$

14.5 Vollständige Funktionensysteme

Vollständigkeitsrelation:
$\sum_j f_j^*(x') f_j(x) = \delta_D(x' - x)$
Orthonormalität von Funktionen:
$\langle f_j, f_k\rangle = \delta_{jk}$
Eigenschaften von Skalarprodukten:

$\langle f, g\rangle := \int_I f^*(x) g(x) dx$
Parcevalrelation:
$\langle g, g\rangle = \sum_i a_i^* ai$ falls konvergent

14.6 Der Taylor'sche Satz

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)(x_0)}}{n!}(x - x_0)^n$

14.7 Jacobideterminanten:

Kugelkoordinaten: $r^2 sin\theta$
Zylinderkoordinaten: r
Polarkoordinaten: r

14.8 Integralsätze mit Diffoperatoren

Gaußscher Satz: $\oint_A d\vec{A}\cdot\vec{G} = \int_V dv \cdot (\nabla\cdot\vec{G})$
Stokes'scher Satz: $\oint_{\partial A} d\vec{s}\cdot\vec{G} = \int_A d\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{G})$

14.9 Partielle Integration

$\int_a^b f'_{(x)} g_{(x)} = \left[f_{(x)} g_{(x)}\right]_a^b - \int_a^b f_{(x)} g'_{(x)}$

14.10 Sphärische Integrale:

$\int d\phi \int d\theta sin\theta = \int d\Omega$
$\int d\phi \int d\theta sin\theta R^2 = \int dA$
$\int d\phi \int d\theta sin\theta \int dr r^2 = \int dV$

14.11 Rechenregeln für Diffoperatoren

$\nabla\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} = -\nabla'\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$
$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{X} = 0$
$\operatorname{rot} grad f = 0$
$\operatorname{div}\vec{v} = \partial_i v_i$
$\operatorname{rot}\vec{v} = \varepsilon_{ijk}\partial_j v_k \vec{e_i}$
$\Delta = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \operatorname{div}\nabla = \delta_{ij}\partial_i\partial_j = \partial_i\partial_i$
$f\Delta f = div(f\nabla f) - \nabla f\cdot\nabla f$
$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \nabla\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A}$
$\operatorname{div}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}(\operatorname{rot}\vec{A}) - A(\operatorname{rot}\vec{B})$

$\operatorname{rot}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

WIETERE FORMELN VON BLATT 1 NR. 1 EINFÜGEN

14.12 Indexkalkül

$\vec{a}\times\vec{b} = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \vec{e_i} = \varepsilon_{ijk} a_i b_j \vec{e_k} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \delta_{ij}\vec{a_i}\vec{b_j}$
$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta jm - \delta_{im}\delta_{jl}$
$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn}$
$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = \delta_{ii}\delta_{ii} = 6$
$\delta_{ij} a_i = a_j$
$\delta_{ij} = D_{ik}\delta_{kl} D_{il}$
$\delta_{ii} = 3$
$det(\delta_{ij}) = 1$
Für eine Drehmatrix q_{ij} gilt:

$\frac{\partial}{\partial x'_i} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}\frac{\partial}{\partial x_j} = q_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}$ mit x'_i die neue gedrehte Koordinate.

14.13 Polare und axiale Vektoren:

- Das Kreuzprodukt zweier polarer oder zweier axialer Vektoren ist ein Axialvektor.
- Das Kreuzprodukt aus einem polaren und einem axialen Vektor ist ein Polarvektor.
- Das Skalarprodukt zweier polarer oder zweier axialer Vektoren ist ein Skalar (d. h. behält sein Vorzeichen unter einer beliebigen Bewegung).
- Das Skalarprodukt aus einem polaren und einem axialen Vektor ist ein Pseudoskalar (d. h. ändert sein Vorzeichen unter einer Punktspiegelung).

14.14 Sphärische Koordinaten und Diffoperatoren

$\nabla f(r, \theta, \phi) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi}\vec{e}_\phi$
$\Delta f(r, \theta, \phi) =$
$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$
$\operatorname{div} f(r, \theta, \phi) =$TODOOo

14.15 Euler'sche Gammafunktion

$\int_0^\infty dx x^{z-1} e^{-x} = \Gamma(z)$

$\Gamma(n) = (n-1)! \forall n \in \mathbb{N}$

14.16 Komplexe Differenzierbarkeit und Holomorphie

- **Komplexe Diffbarkeit:** $\exists\frac{dg}{dz}|_\xi$ und eindeutig
- **analytisch:** erfüllt die CR-DGL TODOOO CRDGL Einfügen
- **regulär:** $\oint dz g(z) = 0$ für geschlossene Kurven
- **holomorph:** $\oint d\xi\frac{g(\xi)}{g - z} = g(z)\cdot 2\pi i$ für geschlossene Kurven

14.17 Trigonometrische Identitäten

$cosh^2(\alpha) - sinh^2(\alpha) = 1$
$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{sin\theta}{1 + cos\theta}$